# INGRESO 2014
# NIVELACIÓN EN MATEMÁTICA

## Guía de Ejercicios

Departamento de Matemática

Universidad Nacional del Sur

**Selección y resolución de ejercicios**

Lic. Denise Belloni
Prof. Sonia Beratz
Lic. Sofía Boltsis
Prof. Ana Cocilova
Lic. Ana de la Torre
Ing. Claudia Egidi
Lic. Carlos Gallardo
Prof. Florencia Gambetta
Ing. Sandra López
Lic. Jorge Martínez
Lic. Silvina Pistonesi
Prof. Ana Julia Rafti Schroeder
Mg. Diana Salgado
Lic. Mónica Zapperi
Prof. Carolina Zeppa

**Coordinación general**

Mg. Marta A. Casamitjana
Subsecretaria Académica

**Digitado y Diagramación General**

Mg. Diana Salgado

## Prólogo

El ingreso a la Universidad enfrenta al estudiante a cambios sustanciales en su vida; es por ello que el Curso de Nivelación de Matemática tiene como objetivo ayudarlo en ese tránsito, no sólo en los contenidos académicos sino en su adaptación a la vida universitaria.

El material que presentamos ha sido elaborado por docentes del Departamento de Matemática para dar a todos los estudiantes la posibilidad de realizar una puesta al día de conceptos y habilidades en matemática que se suponen adquiridos en el nivel medio, así como también equiparar la formación en esta disciplina de los alumnos procedentes de las diferentes escuelas.

En cada una de las unidades incluimos:

- ejercicios resueltos paso a paso, indicados con (*), que servirán de guía para la realización de las actividades propuestas,
- ejercicios para resolver, ordenados en nivel de dificultad creciente, cuyas respuestas aparecen al final de la guía.

En algunas unidades incorporamos conceptos y resultados teóricos.

Debemos destacar que cada estudiante es responsable de sus logros. El esfuerzo y la dedicación deben ser los compañeros ineludibles en la Universidad y el éxito depende fundamentalmente de ellos. Los docentes nos comprometemos a brindar el apoyo necesario para iniciar este camino, pero cada uno debe participar seria, crítica y activamente en esta propuesta, porque sólo así tendrá sentido lo que se haga desde la Universidad.

Sugerimos la forma de trabajo para desarrollar esta guía:

- repasar los conceptos teóricos básicos necesarios para abordar cada unidad,
- leer en forma cuidadosa los ejercicios resueltos y consultar a los docentes del curso las dudas que se presenten,
- hacer todos los ejercicios propuestos, para adquirir habilidades matemáticas y lograr una mejor comprensión de todos los temas.

Departamento de Matemática
Universidad Nacional del Sur

## Agradecimientos

A los docentes Susana Orofino y Marta Zander por la colaboración en el digitado en tex científico y la revisión de soluciones.

A los docentes Diana Salgado y Adriana Verdiell, por su colaboración tanto en el digitado en tex como en la redacción de varios ejercicios.

Al docente Carlos Gallardo, por su colaboración en el digitado en tex y a los docentes Aída Kremer y Mónica Zapperi por la cuidadosa revisión de soluciones y acertadas observaciones.

A los docentes Claudia Egidi y Flavia Buffo por el aporte de las figuras incluidas en esta guía.

# Notación

$\mathbb{N}$ : conjunto de los números naturales
$\mathbb{Z}$ : conjunto de los números enteros
$\mathbb{Q}$ : conjunto de los números racionales
$\mathbb{I}$ : conjunto de los números irracionales
$\mathbb{R}$ : conjunto de los números reales
$>$ : mayor que
$\geq$ : mayor o igual que
$<$ : menor que
$\leq$ : menor o igual que
$\in$ : pertenece
$\notin$ : no pertenece
$\cup$ : unión
$\cap$ : intersección
$:$ : tal que
$\emptyset$ : conjunto vacío
$\forall$ : para todo
$f : A \to B$ : función $f$ definida de $A$ en $B$
$f(x)$ : $f$ de $x$
$D(f)$ : dominio de $f$
$Im(f)$ : imagen de $f$
$sig(x)$ : signo de $x$
$\Rightarrow$ : implica
$\Leftrightarrow$ : equivalente
$\approx$ : aproximado

# Índice

**1. Números Reales** **7**
1.1. Operaciones. Propiedades . . . . . 7
1.2. Operaciones con expresiones algebraicas y racionales . . . . . 12
1.3. Ecuaciones . . . . . 13
1.4. Inecuaciones . . . . . 16
1.5. Apéndice . . . . . 21

**2. Funciones reales de una variable real** **25**
2.1. Funciones . . . . . 25
2.2. Dominio, imagen y gráfico de una función real . . . . . 29
2.3. Operaciones entre funciones . . . . . 33

**3. Función lineal. Rectas** **36**
3.1. Función lineal . . . . . 36
3.2. Rectas . . . . . 38

**4. Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas** **42**
4.1. Clasificación y resolución . . . . . 42
4.2. Problemas . . . . . 44

**5. Función cuadrática y ecuación de segundo grado** **46**
5.1. Funciones cuadráticas . . . . . 46
5.2. Ecuación de segundo grado . . . . . 53

**6. Polinomios y Funciones Polinómicas** **59**
6.1. Polinomios . . . . . 59
6.2. Funciones Polinómicas . . . . . 61

**7. Funciones Trigonométricas** **63**
7.1. Trigonometría . . . . . 63
7.2. Resolución de Triángulos Rectángulos . . . . . 65

**8. Respuestas a los ejercicios** **69**

# 1. Números Reales

## 1.1. Operaciones. Propiedades

◇*Definición:* Un número entero $a$ es **múltiplo** de un entero $b$ si es posible encontrar un número natural $n$ tal que: $a = n \cdot b$

Notemos que si $a$ es múltiplo de $b$, la división $a \div b$ tiene resto cero, por lo tanto decimos indistintamente:

- $a$ es múltiplo de $b$
- $b$ divide a $a$
- $b$ es factor de $a$
- $a$ es divisible por $b$

Ejemplo: 12 es múltiplo de 4 ya que existe $3 \in \mathbb{N}$ tal que $3 \cdot 4 = 12$. Por lo tanto decimos indistintamente:

- 12 es múltiplo de 4
- 4 divide a 12
- 4 es factor de 12
- 12 es divisible por 4

1. ¿208 y 736 son múltiplos de 8? ¿la suma de ellos es múltiplo de 8? ¿y su diferencia? ¿y su producto?

2. Halle siete múltiplos consecutivos para cada uno de los siguientes números.

   2, 3, 4, 5, 6, 8 y 9

   a) ¿se repite algún múltiplo entre los hallados? ¿Por qué?

   b) ¿es igual hallar múltiplos que factores?

3. Escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda. Justifique su respuesta.

   a) Si un número es divisible por 6 entonces es divisible por 3.

   b) Si un número es divisible por 3 entonces es divisible por 6

   c) Si un número es divisible por 210, es divisible por 6.

   d) Existe un número que divide a todos los números.

   e) Existe un número que es múltiplo de todos los números.

4. Escriba en cada caso todos los números enteros $x$ que satisfacen la condición establecida.

$$a) -101 < x < -97 \qquad b) -17 \leq x < -12 \qquad c) -1 \leq x \leq 2$$

5. Si $n$ es un número natural, determine para qué valores de $n$ estos números pertenecen al conjunto de los números enteros.

$$a)\frac{n}{2} \qquad b)\frac{n}{3} \qquad c)n-5 \qquad d)n+\frac{1}{2} \qquad e)\sqrt{n}$$

6. Complete el cuadro de equivalencias

| porcentaje | fracción | número decimal |
|---|---|---|
| 10 % | 1/10 | 0,1 |
| 25 % | | |
| | 1/2 | |
| | | 0,8 |
| | 3/4 | |

7. Para pensar (se pretende una deducción o un razonamiento expresado con sus palabras no una demostración formal).

   a) Dado un número racional $a$

      i) ¿siempre existe un racional $b$ tal que $a + b = 0$?

      ii) ¿y tal que $a \cdot b = 1$?

   b) Dado un número natural $a$

      i) ¿siempre existe un natural $b$ tal que $a + b = 0$?

      ii) ¿y tal que $a \cdot b = 1$?

   c) Dado un número entero $a$

      i) ¿siempre existe un entero $b$ tal que $a + b = 0$?

      ii) ¿y tal que $a \cdot b = 1$?

8. Si el inverso del número racional $a - 4$ es $1/5$, determine el opuesto de $a + 1$.

9. Si $x \in \mathbb{N}$ y $x > 1$, ordene los siguientes números en forma creciente y justifique.

$$\frac{1}{x+1} \qquad \frac{1}{x} \qquad x \qquad -\frac{1}{x} \qquad \frac{1}{-x-1}$$

10. Sean $m, n, s, t$ números enteros. Indique si las siguientes igualdades, siempre que estén definidas, son verdaderas (V) o falsas (F).

$$a)\frac{m}{s+t} = \frac{m}{s} + \frac{m}{t} \qquad b)1 + \frac{2m}{m+t} = \frac{3m+t}{t+m} \qquad c)\frac{m}{m+t} = \frac{1}{t} \qquad d)\frac{3m+t}{m+t} = 3$$

11. Sean $a, b \in \mathbb{N}$, complete con el signo $>$, $<$, $=$, $\geq$, $\leq$ que corresponda y justifique.

    a) Si $a > b$, entonces $a/b \ldots 1$.

    b*) Si $a < b$, entonces $a/b \ldots 1$.

    c) Si $a = b$, entonces $a/b \ldots 1$.

    d) Si $a = 1$, entonces $a/b \ldots 1$.

    Ejemplo b). Si $a < b$, entonces $a/b < 1$. Justificación: Dividiendo por $b$ ambos miembros de la desigualdad $a < b$, como $b > 0$ pues $b \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$\frac{a}{b} < \frac{b}{b}, \quad \text{entonces} \quad \frac{\text{a}}{\text{b}} < 1.$$

12. Un comerciante compra una nueva máquina registradora por \$1200. Luego de un tiempo la pone en venta incrementando su precio original en un 30 %. Posteriormente, debido a que no puede venderla, rebaja el precio en un 20 %. Finalmente, vende la máquina. ¿Cuál fue el precio de venta final?

13. Sabiendo que $a = \dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$ y $b = \dfrac{3-3\sqrt{2}}{4}$, halle los siguientes números irracionales.

$$\text{a)} a+b \qquad \text{b)} -b \qquad \text{c)} a - \frac{2}{b}$$

14. Efectúe las siguientes operaciones y exprese su resultado como número irracional.

$$a)(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 \qquad b)(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})^2 \qquad c)(\sqrt{5}-\sqrt{6})(\sqrt{5}+\sqrt{6})\sqrt{3}$$

15. Verifique la validez de las siguientes igualdades. En algunos casos deberá racionalizar numerador y/o denominador.

    a*) $\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = \dfrac{\sqrt{6}-1}{3}$ b) $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{12}} = 1 + \dfrac{\sqrt{6}}{6}$

    c) $\dfrac{1}{2(\sqrt{3}-\sqrt{5})} = -\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{4}$ d) $\dfrac{3}{\sqrt{5}-2} = 3\sqrt{5}+6$

    e) $\dfrac{11}{2\sqrt{5}+3} = 2\sqrt{5}-3$ f) $\dfrac{3\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+2} = \sqrt{2}$

    g) $\dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{3}+5\sqrt{2}$ h) $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} - \dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = -2\sqrt{35}$

    Ejemplo a). $\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = \dfrac{\sqrt{6}-1}{3}$. La igualdad es válida. Justificación:

$$\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot 3^2}} = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{(2\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}\sqrt{2}-2}{3\cdot 2} = \frac{2\sqrt{6}-2}{2\cdot 3}$$

$$= \frac{2(\sqrt{6}-1)}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{6}-1}{3}$$

16. Indique a qué subconjunto/s de números reales pertenece cada uno de los siguientes números.

a) $\pi/2 \in \ldots\ldots$ b) $\sqrt{36} \in \ldots\ldots$ c) $2,25111\ldots \in \ldots\ldots$ d*) $\dfrac{75}{-5} \in \ldots\ldots$

Ejemplo d). $\dfrac{75}{-5}$ pertenece a los conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.

17. En las siguientes demostraciones, identifique las propiedades de los números reales que se utilizan en cada renglón (Sugerencia: consulte, si es necesario el Apéndice al final de esta unidad).

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$:

a*) $$\begin{aligned} a(a+b)+ba+a^2 &= a(a+b)+ab+a^2 \\ &= (a^2+ab)+ab+a^2 \\ &= a^2+(ab+ab)+a^2 \\ &= (a^2+a^2)+2ab \\ &= 2a^2+2ab \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} a(b+(a-b)) &= a(b+(a+(-b))) \\ &= a(b+(-b+a)) \\ &= a(b+(-b)+a) \\ &= a(0+a) \\ &= a \cdot a = a^2 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} a+(b\cdot(a \div b)) &= a+(b\cdot(a\cdot b^{-1})) \\ &= a+(b\cdot(b^{-1}\cdot a)) \\ &= a+((b\cdot b^{-1})\cdot a)) \\ &= a+(1\cdot a) \\ &= a+a = 2a \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} \frac{a}{1-\frac{1}{b}} &= \frac{a}{1+\left(-\frac{1}{b}\right)} \\ &= \frac{a}{(b\cdot b^{-1})+\frac{-1}{b}} \\ &= \frac{a}{(b\cdot b^{-1})+(-1\cdot b^{-1})} \\ &= \frac{a}{b^{-1}(b+(-1))} \\ &= a\cdot(b^{-1}(b+(-1)))^{-1} \\ &= a\cdot((b^{-1})^{-1}\cdot(b+(-1))^{-1}) \\ &= a\cdot(b\cdot(b+(-1))^{-1}) \\ &= (a\cdot b)\cdot(b+(-1))^{-1} \\ &= \frac{ab}{b+(-1)} \end{aligned}$$

Ejemplo a).

$$\begin{aligned} a(a+b)+ba+a^2 &= a(a+b)+ab+a^2 \text{ [conmutativa del producto]} \\ &= (a^2+ab)+ab+a^2 \text{ [distributiva del producto con respecto a la suma]} \\ &= a^2+(ab+ab)+a^2 \text{ [asociativa de la suma]} \\ &= (a^2+a^2)+2ab \text{ [conmutativa y asociativa de la suma]} \\ &= 2a^2+2ab \end{aligned}$$

18. Verifique las siguientes igualdades (sin usar calculadora).

$$a)\frac{\frac{1}{2}\div(\frac{3}{4}\div\frac{3}{2})}{(1-\frac{1}{3})\div(1-\frac{1}{5})}=\frac{6}{5} \qquad b)\frac{(3^4)^3(3^2)^3}{(-3)^{15}\cdot 3^4}=-\frac{1}{3} \qquad c)\frac{[3^{-2}-(-2)^{-2}]^{-1}}{3-\frac{3(-2)}{3-2}}=-\frac{4}{5}$$

$$d)\left(\sqrt[4]{\sqrt{\sqrt[3]{2}}}\right)^{96}+\left\{\left[\left(\sqrt[6]{\sqrt[3]{2}}\right)^2\right]^3\right\}^9=24$$

19. Las igualdades indicadas en cada caso no son verdaderas. Indique los errores de procedimiento cometidos y halle el resultado correcto.

$$a)2-3(4\cdot 2+8)=-1\cdot 16=-16 \qquad b)\frac{-2^2+4^{-1}}{-2^3-2^{-1}}=\frac{4+\frac{1}{4}}{-8-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{17}{4}}{-\frac{17}{2}}=-\frac{1}{2}$$

20. Resuelva los siguientes problemas.

a) Un terreno rectangular de 20 km de frente por 5 km de fondo debe cercarse con tres vueltas de alambre. ¿Cuántos metros de alambre se necesitan?

b) Debemos colocar perlitas de 8 mm de diámetro en el borde de una torta circular que tiene 12 cm de radio. ¿cuántas perlitas debemos comprar?

21. Sea $x \in \mathbb{R}$, indique si son verdaderas o falsas cada una de estas afirmaciones.

a) $x^2 \geq 0$.

b) $x^3 \geq 0$.

c) $\sqrt[3]{x}$ sólo existe si $x \geq 0$.

d) $x^{-1} < 0$ si $x < 0$.

e) $-x^2 \leq 0$ .

f) $-x < 0$.

22. Sea $a \in \mathbb{R}$, ordene de menor a mayor los números $a$, $a^2$, $1/a$ y $\sqrt{a}$ en estos dos casos.

$a)$ Si $\quad a > 1$ b) Si $\quad 0 < a < 1$

## 1.2. Operaciones con expresiones algebraicas y racionales

1. Determine el valor numérico de la expresión en cada caso.

   a) $-2x^2 + ax - b \quad$ si $\quad x = 3, \quad a = -2 \quad$ y $\quad b = -7.$

   b) $\dfrac{x^{-2} - y^{-1}}{y^{-2} + x^{-1}} \quad$ si $\quad x = -3 \quad$ e $\quad y = 6.$

   c) $y^{-2} z \sqrt[3]{x} \quad$ si $\quad x = -8, \quad y = 2 \quad$ y $\quad z = \frac{1}{4}.$

   d) $3x^2 - 2xy + \dfrac{1}{2}x^4 z - \dfrac{3}{4}y^2 z^3 \quad$ si $\quad x = \sqrt{2}, \quad y = \sqrt{8} \quad$ y $\quad z = -1.$

2. Se le preguntó a un estudiante de esta universidad respecto al resultado de la expresión $x + 2y + \sqrt{(x - 2y)^2}$ para $x = 2$ e $y = 4$.
   El estudiante efectuó el siguiente razonamiento:
   $x + 2y + \sqrt{(x - 2y)^2} = x + 2y + x - 2y = 2x$. Reemplazando $x$ por su valor, dedujo que la expresión vale 4.
   ¿Es correcta su respuesta?

3. Si se supone que $x, y, z \in \mathbb{R}$, tal que $x > 0$, $y < 0$, $z < 0$, determine el signo de las siguientes expresiones.

   a) $x - y$ b) $x - (y + z)$ c) $\dfrac{z - x}{y}$ d) $x(y + z)$ e) $(-y)^3$ f) $(y - x)^2$

4. Realice las operaciones indicadas y exprese el resultado en su forma más simplificada.

   a) $(4xy - 10x^2y - 3xy^2) - (7x^2 - 5xy + 12xy^2)$

   b) $3x + 4y + x - [x - 2(y - x) - y]$

   c) $3 - \{2x - [1 - (x + y)] + x - 2y\}$

   d) $(b^x - b^{x+1})b^{2x}$

   e) $2a^x - 3a^{x-1}(a^x + 2a)$

5. Verifique las siguientes igualdades.

   a) $\left(\dfrac{a + b}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a - b}{2}\right)^2 = ab$

   b) $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$

6. Encuentre los errores en los siguientes procedimientos.

   a) $\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x + y} = \dfrac{\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}}{x + y} = \dfrac{x + y}{x + y} = 1$

   b) $x^2y + x + xy + y = x(xy + 1) + y(x + 1) = (x + y)(xy + 1)(x + 1)$

7. Factorice y simplifique al máximo las siguientes expresiones.

   a) $a^{10} - a^8 - a^6 + a^4$ b) $1 - 4b + 4b^2$
   c) $y^2 - 25m^2$ d*) $x^2 - a^2 + 2xy + y^2 + 2ab - b^2$

   Ejemplo d).

$$x^2 - a^2 + 2xy + y^2 + 2ab - b^2 = [x^2 + 2xy + y^2] - [a^2 - 2ab + b^2] = [x + y]^2 - [a - b]^2 =$$

$$= [(x + y) - (a - b)][(x + y) + (a - b)] = [x + y - a + b][x + y + a - b]$$

8. Opere algebraicamente, factorice y simplifique al máximo las siguientes expresiones formales.

   a*) $\dfrac{bx^2 - b - x^2 + 1}{b^2x - x + b^2 - 1}$ b) $\dfrac{a^{-2} - 2b^{-1}}{a^{-4} - 4b^{-2}}(b - 2a)^{-1}$

   c) $\dfrac{(a + b)^{-2}}{(ab)^{-2}} \div \dfrac{1}{b^{-2} - a^{-2}}$ d) $\dfrac{m + n}{m^2 - n^2} \cdot \dfrac{m - n}{m^2 - 2nm + n^2}$

   Ejemplo a).

$$\frac{bx^2 - b - x^2 + 1}{b^2x - x + b^2 - 1} = \frac{b(x^2 - 1) - (x^2 - 1)}{x(b^2 - 1) + (b^2 - 1)} = \frac{(b - 1)(x^2 - 1)}{(x + 1)(b^2 - 1)} =$$

$$= \frac{(b - 1)(x + 1)(x - 1)}{(x + 1)(b + 1)(b - 1)} = \frac{x - 1}{b + 1} \quad , b \neq 1, x \neq -1.$$

9. Compruebe la siguiente igualdad.

$$\frac{(x^{-1} + y^{-1})^{-1}}{x^{-1} - y^{-1}} \div (x^{-2} - y^{-2})^{-1} = 1$$

10. En cada caso racionalice el denominador o el numerador, según sea el caso, y simplifique al máximo la expresión resultante.

$$a)\frac{x^2 - x}{x - \sqrt{2x - 1}} \qquad b)\frac{2x + 14}{\sqrt{2 - x} - 3} \qquad c)\frac{\sqrt{x} + 2\sqrt{y}}{x^2y - 4xy^2}$$

## 1.3. Ecuaciones

1. Determine si los valores de $x$ indicados son soluciones de la ecuación respectiva.

   a) $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0; \quad x = 2, \quad x = -1.$
   b) $x + \sqrt[3]{x^3 + 1} = 2x + 1; \quad x = -1, \quad x = -2.$
   c) $\dfrac{x + 1}{x^2 - 1} = 0; \quad x = -1.$

2. Determine el conjunto solución de cada una de las siguientes ecuaciones y verifique el resultado obtenido.

a) $x^2 + 3x - 5 = x(x - 8) + 9$.

b) $3 - x(2 - x) = x^2 - 2(x + 3)$.

c*) $(x - 3)(2x - 5) = (x - 3)(3 - 4x)$.

d) $(x^2 + x)^2 - x(x^2 + x) = 0$. (Sugerencia: factorice la expresión)

e) $(2x - 3)^3 + 8 = 0$.

f) $\dfrac{2x - 3}{x + 3} = \dfrac{4x - 6}{2(x + 3)}$.

g) $\dfrac{7x^2 - 28x + 21}{x - 1} = 7x - 21$.

Ejemplo c). Observamos que hay un factor común en ambos miembros de la igualdad. Conviene entonces escribir la ecuación equivalente

$$(x - 3)(2x - 5) - (x - 3)(3 - 4x) = 0.$$

Factorizando,

$$\begin{aligned} (x - 3)[(2x - 5) - (3 - 4x)] &= 0 \\ (x - 3)(6x - 8) &= 0 \end{aligned}$$

de donde resulta $x - 3 = 0$ ó $6x - 8 = 0$, es decir $x = 3$ ó $x = \dfrac{4}{3}$.

Verificación:

- Reemplazamos $x$ por 3 en la ecuación de partida:

$$\begin{aligned} (3 - 3)(6 - 5) &= (3 - 3)(3 - 12) \\ 0 \cdot 1 &= 0(-4) \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

- Reemplazamos $x$ por $\dfrac{4}{3}$ en la ecuación de partida:

$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{3} - 3\right)\left(2 \cdot \frac{4}{3} - 5\right) &= \left(\frac{4}{3} - 3\right)\left(3 - 4 \cdot \frac{4}{3}\right) \\ -\frac{5}{3}\left(-\frac{7}{3}\right) &= -\frac{5}{3}\left(-\frac{7}{3}\right) \\ \frac{35}{9} &= \frac{35}{9}. \end{aligned}$$

Observación: Seguramente alguien habrá pensado en suprimir de entrada el factor $x - 3$ común a ambos miembros de la ecuación y escribir

$$(x - 3)(2x - 5) = (x - 3)(3 - 4x) \Leftrightarrow 2x - 3 = 3 - 4x.$$

CUIDADO!! Estas ecuaciones son equivalentes si $x \neq 3$.

3. Determine el conjunto solución de cada una de las siguientes ecuaciones y verifique el resultado obtenido.

   a*) $\dfrac{x}{x-3}+\dfrac{2}{x+3}=\dfrac{x^2}{x^2-9}$.

   b) $\dfrac{x^2-4x+1}{x+1}=\dfrac{x(x-3)-(4x-1)}{x+1}$.

   c) $\dfrac{(x+1)(x+3)}{x+1}=\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

   d) $x^{-4}+5x^{-2}=-63$.

   e) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+x\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=0$. (Sugerencia: factorice)

   Ejemplo a). Como no es posible dividir por cero, en primer lugar determinamos los valores de $x$ que deben descartarse analizando cada término de la ecuación:

   (1) $x-3\neq 0$, o sea $x\neq 3$.

   (2) $x+3\neq 0$, o sea $x\neq -3$.

   (3) $x^2-9\neq 0$, o sea $x\neq 3$ y $x\neq -3$.

   De (1), (2) y (3) resulta que 3 y $-3$ deben descartarse como posibles soluciones.

   Ahora trabajamos formalmente con la ecuación con el objeto de simplificarla.

$$\begin{aligned}\frac{x}{x-3}+\frac{2}{x+3} &= \frac{x^2}{x^2-9}\\ \frac{x(x+3)+2(x-3)}{(x+3)(x-3)} &= \frac{x^2}{x^2-9}\\ \frac{x^2+5x-6}{x^2-9} &= \frac{x^2}{x^2-9}\end{aligned}$$

   y, como $x\neq 3$ y $x\neq -3$,

$$\begin{aligned}x^2+5x-6 &= x^2\\ 5x-6 &= 0\\ x &= \frac{6}{5}.\end{aligned}$$

   Como el valor obtenido $x=\dfrac{6}{5}$ es distinto de 3 y $-3$, es claro que es la solución de la ecuación.
   Complete el ejercicio realizando la verificación.

4. Determine el conjunto solución de cada una de las siguientes ecuaciones y verifique el resultado obtenido.

   a) $\dfrac{6}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} = \dfrac{9}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}$.

   b) $\sqrt[3]{x^2 - 4} = 2$.

   c) $x\sqrt{x+1} + 3 = 3$.

   d) $6 - 2x^{\frac{2}{3}} = -10$

   e) $x\sqrt[5]{x^{-3}} = 2$

5. Encuentre el o los valores de $m$ para que se cumpla la condición que se solicita.

   a) $x - 2(1+3m)x + 7(3+2m) = 0$ no tiene solución.

   b) $x = -3$ es solución de $x^2 - 2(1+3m)x + 7(3+2m) = 0$.

   c) $x = 5$ es solución de $\dfrac{x+1}{2} - 6x + 4m = 2x - \dfrac{x+4}{3} + \dfrac{m}{2}$.

6. a) Después de un 20 % de descuento, un proyector se vendió en 9 600 pesos. Determine el precio original del artículo.

   b) Un grupo de alumnos fue encuestado. El 20 % (700 alumnos) favoreció a un nuevo producto sobre la marca de mayor venta. ¿Cuántos alumnos fueron encuestados?

   c) Encuentre tres números enteros consecutivos cuya suma sea 48.

   d) En 5 años Alberto tendrá 3 veces la edad que tenía hace 7 años. ¿Cuántos años tiene Alberto?

   e) El señor González tiene tres inversiones de las que recibe un ingreso anual de 3 965 dólares. Una inversión de 8 500 de dólares está a una tasa de interés anual de 9 %, otra inversión de 11 000 dólares está a una tasa de interés anual de 10 %. ¿Cuál es la tasa de interés anual que recibe sobre la tercera inversión, de 15 000 dólares?

   f) Halle en cada caso, el volumen de un cubo sabiendo que

      i) la diagonal del mismo mide $\sqrt{300}$ dm.

      ii) la diagonal de la base mide 10 dm.

   g) Un tanque de forma cúbica tiene una capacidad de 216 000 litros. Halle la medida de la arista.

   h) Halle el diámetro de una esfera cuyo volumen es de $\dfrac{9261}{6}\pi$ m$^3$.

## 1.4. Inecuaciones

1. Represente los siguientes conjuntos utilizando la notación de intervalo y grafíquelos en la recta.

a)$\{x \in \mathbb{R} : -4 < x < 5\}$ b)$\{x \in \mathbb{R} : 2 < x \leq 12\}$

c)$\{x \in \mathbb{R} : x > 2\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x \leq 12\}$ d)$\{x \in \mathbb{R} : x > 2\} \cap \{x \in \mathbb{R} : x \leq 12\}$

e)$\{x \in \mathbb{R} : -4 < x \leq 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

2. Complete utilizando la notación de intervalo.

   a) Si $x \leq 3$ y $x > -7$ entonces $x \in$....

   b*) Si $x < 1$ ó $x \geq 3$ entonces $x \in$....

   c) Si $x > 2$ ó $x < 4$ entonces $x \in$....

   Ejemplo b). Si es $x < 1$, $x \in (-\infty, 1)$. Si es $x \geq 3$, $x \in [3, +\infty)$.
   Por lo tanto, $x \in (-\infty, 1) \cup [3, +\infty)$.

3. Sea $x \in \mathbb{R}$. Determine si las siguientes afirmaciones son Verdaderas o Falsas. Justifique su respuesta.

   a) El conjunto solución de $x^2 + 1 > 0$ es $\mathbb{R}$.

   b) El conjunto solución de $-x^4 - 2 > 0$ es $\mathbb{R}$.

   c) $\forall x \leq 1$ se cumple que $x^2 \leq 1$.

   d) El conjunto solución de $\dfrac{2}{(1-x)^2} > 0$ es $\mathbb{R} - \{1\}$.

4. Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Si $x > y > 0$, indique cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas.

   a) $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$

   b) $-x < -y$

   c) $x - y > 0$

5. Sean $r, s \in \mathbb{R}$. Si $r > s$, indique cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas.

   a) $\dfrac{1}{r-s} > \dfrac{1}{s-r}$

   b) $(r-s)(s-r) > 0$.

   c) $\dfrac{r-s}{s-r} = 1$.

6. Resuelva la siguientes inecuaciones, grafique el conjunto solución y expréselo usando la notación de intervalo:

   a) $10 - \dfrac{5x}{2} \geq 0$ b) $-3x + 1 \leq 5(x-3) + 2$

   c) $\dfrac{34-2x}{3} + 9 < \dfrac{3x-8}{4} - x$ d) $(x-1)^2 - 7 > (x-2)^2$

   e*) $4 > \dfrac{2-3x}{7} \geq 2$ f) $-1 \leq \dfrac{3x-1}{7} < 3$

   Ejemplo e). Observemos que se trata de dos inecuaciones:

   $$\text{i)} \quad 4 > \frac{2-3x}{7} \qquad \text{ii)} \quad \frac{2-3x}{7} \geq 2.$$

   La solución del ejercicio es el conjunto de soluciones comunes a i) e ii), entonces resolvamos cada una de ellas:

   i) $4 > \dfrac{2-3x}{7} \Leftrightarrow 28 > 2 - 3x \Leftrightarrow 3x > -26 \Leftrightarrow x > -\dfrac{26}{3}$

   ii) $\dfrac{2-3x}{7} \geq 2 \Leftrightarrow 2 - 3x \geq 14 \Leftrightarrow -3x \geq 12 \Leftrightarrow x \leq -4.$

   Por lo tanto el conjunto solución es el intervalo $(-\dfrac{26}{3}, -4]$.

   Otra forma de resolverlo es trabajando simultáneamente con las dos inecuaciones:

   - Multiplicamos cada miembro por 7: $28 > 2 - 3x \geq 14$
   - Restamos a cada miembro 2 unidades : $26 > -3x \geq 12$
   - Dividimos cada miembro por $-3$, entonces cambia el sentido de las desigualdades: $-\dfrac{26}{3} < x \leq -4$, por lo tanto la solución es $(-\dfrac{26}{3}, -4]$.

7. Resuelva la siguientes inecuaciones, grafique el conjunto solución y expréselo usando la notación de intervalo:

   a) $(x-2)x > 0$ b*) $(2x-1)(x-3) > 0$

   c) $x(1-2x)(x+\frac{1}{2}) \leq 0$ d) $x^2 < x$

   e) $2x^3 - x^2 > 0$ f) $\dfrac{x^2 - x}{(x+1)(2-x)} \geq 0$

   Ejemplo b). El producto $(2x-1)(x-3)$ es positivo cuando ambos factores son positivos o negativos.
   Analicemos el signo de cada factor:

$$\text{i)} \qquad (2x-1) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

$$(2x-1) < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$$

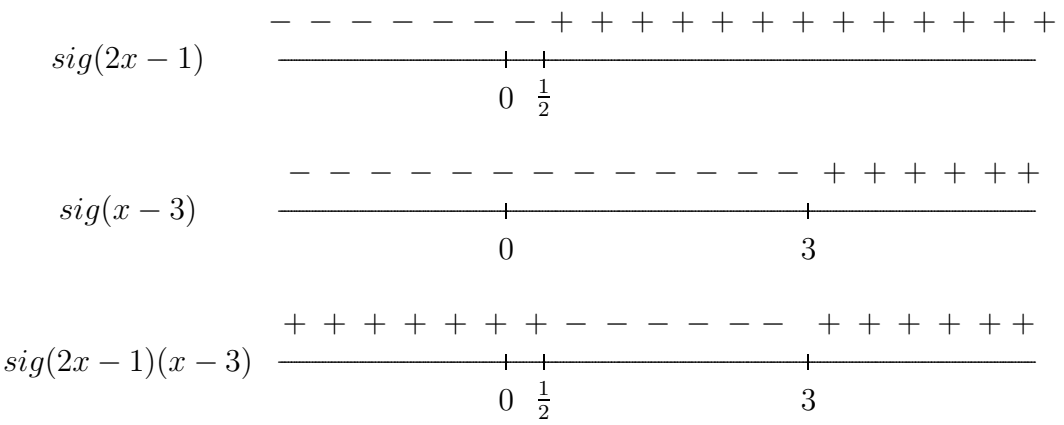
$$\text{ii)} \qquad (x-3) > 0 \Leftrightarrow x > 3$$

$$(x-3) < 0 \Leftrightarrow x < 3$$

Por lo tanto, ambos factores son positivos en el intervalo $(3, +\infty)$ y son negativos en $(-\infty, \frac{1}{2})$, entonces el conjunto solución es: $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (3, +\infty)$.

Para analizar el signo de un producto, es muy útil proceder gráficamente de la siguiente manera:
1) Se dibuja una recta numérica para cada factor y allí se indica su signo.
2) Se aplica la regla de los signos para obtener el signo del producto.

Veamos cómo hacerlo en el ejemplo que estamos considerando:




8. Resuelva las siguientes inecuaciones, grafique el conjunto solución y expréselo usando la notación de intervalo.

a) $\dfrac{-1-3x}{1-4x} \leq 2$ b*) $\dfrac{x+3}{x+1} < 2$

c) $\dfrac{x+2}{2-x} \geq 1$ d) $\dfrac{1}{x+2} \leq -\dfrac{x^2}{x+2}$

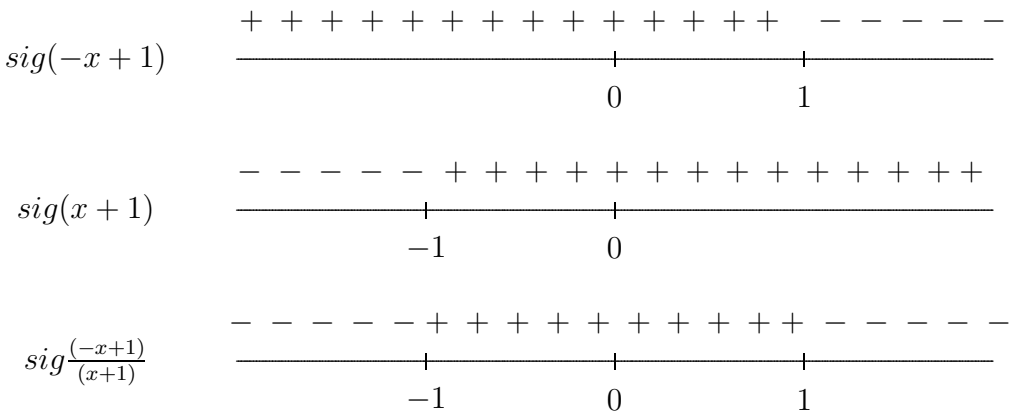
e) $-\dfrac{2}{x} \geq -\dfrac{5x}{x^2+6}$ f) $\dfrac{2-x}{x-3} \leq \dfrac{2}{x}$

Ejemplo b). Observemos que la inecuación no tiene un miembro nulo como el último ejemplo desarrollado (7.b), por lo tanto podemos proceder de la siguiente manera para obtener una inecuación equivalente a la dada que sí tenga un miembro nulo.

Ante todo descartamos los valores que no pueden pertenecer al conjunto solución, es decir, debe ser $x \neq -1$.

$$\frac{x+3}{x+1} < 2 \Leftrightarrow \frac{x+3}{x+1} - 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{x+3-2x-2}{x+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{-x+1}{x+1} < 0.$$

Aplicamos la regla de los signos para obtener el conjunto solución:



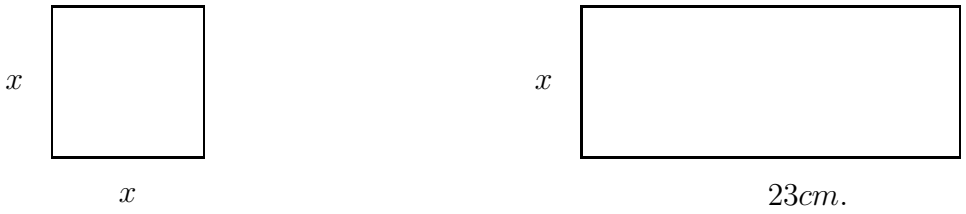

Por lo tanto el conjunto solución es $S = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

9. Encuentre el error en el siguiente procedimiento.
Sea $a$ un número real arbitrario, tal que $a > 2$ entonces:

$$a > 2$$
$$2a > 4$$
$$2a - a^2 > 4 - a^2$$
$$a(2-a) > (2-a)(2+a)$$
$$\frac{a(2-a)}{2-a} > \frac{(2-a)(2+a)}{2-a}$$
$$a > 2 + a$$
$$a - a > 2 + a - a$$
$$0 > 2$$

10. Plantee y resuelva los siguientes problemas.

    a) Halle los valores de $x$ para los cuales el área del cuadrado es mayor que la del rectángulo.




b) Clara tiene varios rollos de 36 fotografías cada uno. Si le falta tomar, a lo sumo 28 fotos para completar cinco rollos, ¿cuántas fotografías tomó Clara como máximo:
*a*)172 *b*)168 *c*)162 *d*)152 *e*)148?

Indique la respuesta correcta.

c) El ICM es la razón entre la masa corporal y el cuadrado de la estatura de una persona. Diversos estudios realizados han concluido que el grupo más saludable corresponde a un ICM comprendido entre 20 y 25$\frac{kg}{m^2}$.
Si una persona mide 1,5$m$, para ser considerada saludable su masa corporal en $kg$ deberá estar comprendida entre:
*a*)30 y 37,5 *b*)30 y 56,25 *c*)40 y 50 *d*)45 y 56,25 *e*)45 y 55
Indique la respuesta correcta.

## 1.5. Apéndice

En esta sección se enuncian las propiedades fundamentales o axiomas que se utilizarán en el curso, que satisfacen las operaciones de suma ($+$), producto ($\cdot$) y la relación $<$ definidas sobre $\mathbb{R}$.

**Axiomas para $+$ y $\cdot$**

Cualesquiera que sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, se verifican:

(R1) $a + (b + c) = (a + b) + c$,

(R2) $a + b = b + a$,

(R3) existe $0 \in \mathbb{R}$, llamado cero, tal que $0 + a = a$,

(R4) para cada $a \in \mathbb{R}$, existe un único $b \in \mathbb{R}$, llamado el opuesto de $a$, tal que $a + b = 0$,

(R5) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$,

(R6) $a \cdot b = b \cdot a$,

(R7) existe $1 \in \mathbb{R}$, llamado uno, $1 \neq 0$ tal que $1 \cdot a = a$,

(R8) para cada $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, existe un único $c \in \mathbb{R}$, llamado el inverso de $a$, tal que $a \cdot c = 1$,

(R9) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

**Axiomas para $<$**
Cualesquiera que sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, se verifican:

(R10) vale una y sólo una de las tres condiciones siguientes:

(i) $a = b$, (ii)$a < b$, (iii) $b < a$,

(R11) $a < b$ y $b < c \Rightarrow a < c$.

**Axiomas para $+$ , $\cdot$ y $<$**
Cualesquiera que sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, se verifican:

(R12) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$,

(R13) $a < b$ y $0 < c \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$.

**Notaciones útiles**
Para cada $a, b \in \mathbb{R}$ se denotará con:

(1) $-a$, al opuesto de $a$, $-a$ es el único real que verifica $a + (-a) = 0$.

(2) $a - b$, a $a + (-b)$, esto es, $a - b = a + (-b)$.

(3) $\frac{1}{a}$ $(a \neq 0)$, al inverso de $a$. En algunos casos, para lograr mayor claridad, se usarán las notaciones $a^{-1}$ o $1/a$ para indicar a dicho inverso. Entonces para cada $a$, $a \neq 0$, $\frac{1}{a}$ es el único real que verifica $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

(4) $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$, al número real $a \cdot \frac{1}{b} = a \cdot b^{-1}$, esto es $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$. El real $\frac{a}{b}$ se llama el cociente de $a$ por $b$, $a$ es el numerador y $b$ el denominador.

Se escribirá:

(5) $a \leq b$, si vale una de las dos propiedades siguientes: (i) $a = b$, (ii) $a < b$. La fórmula $a \leq b$ se lee: *a precede a b* o *a es menor o igual que b*.

Las propiedades más importantes de la relación $\leq$ son:

(O1) $a \leq a$,

(O2) $a \leq b$ y $b \leq a \Rightarrow a = b$,

(O3) $a \leq b$ y $b \leq c \Rightarrow a \leq c$,

(O4) dados $a, b \in \mathbb{R}$ vale alguna de las dos propiedades siguientes:
(i) $a \leq b$, (ii) $b \leq a$.

(6) $a > b$, si se cumple que $b < a$. La fórmula $a > b$ se lee: *a es mayor que b*.

(7) $a \geq b$, si se verifica que $b \leq a$. La fórmula $a \geq b$ se lee: *a es mayor o igual que b*.

(8) $a < b < c$, para indicar que $a < b$ y $b < c$.

(9) $a \leq b \leq c$, para indicar que $a \leq b$ y $b \leq c$.

(10) Se dirá que $a \in \mathbb{R}$ es positivo, si se verifica que $a > 0$ y negativo si $a < 0$.

(11) Con la terminología indicada en (10) y teniendo en cuenta R10, se puede decir que *todo número real es positivo o negativo o nulo.*

(12) De R1 y R5, se puede escribir $a + b + c$ y $a \cdot b \cdot c$ en lugar de $a + (b + c)$ y $a \cdot (b \cdot c)$.

(13) Para simplificar, cuando no hay lugar a dudas se puede escribir $ab$ en lugar de $a \cdot b$.

**Otras propiedades**

A partir de los axiomas anteriores se pueden demostrar las siguientes propiedades:

(T1) $-(-a) = a$,

(T2) $a + b = a + c \Rightarrow b = c$,

(T3) $a0 = 0$,

(T4) $a(-b) = (-a)b = -(ab)$,

(T5) $(-a)(-b) = ab$

(T6) $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \quad \text{o} \quad b = 0$,

(T7) $ab = ac$ y $a \neq 0 \Rightarrow b = c$,

(T8) $(a^{-1})^{-1} = a, a \neq 0$,

(T9) $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$,

(T10) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc, b \neq 0, d \neq 0$,

(T11) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{ca}{cb}, c \neq 0$,

(T12) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$,

(T13) $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$,

(T14) $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{ad}{bc}$,

(T15) $\dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b} = -\dfrac{a}{b}$,

(T16) $\dfrac{a}{b} \neq 0 \Rightarrow (\dfrac{a}{b})^{-1} = \dfrac{b}{a}$,

(T17) $a < b$ y $c < d \Rightarrow a + c < b + d$,

(T18) $a + c < b + c \Leftrightarrow a < b$,

(T19) $0 < a < b$ y $0 < c < d \Rightarrow ac < bd$,

(T20) $a < b \Leftrightarrow -b < -a$,

(T21) $0 < a \Leftrightarrow -a < 0$,

(T22) $0 < 1$,

(T23) $a < b, c < 0 \Rightarrow ac > bc$,

(T24) $a < 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} < 0$,

(T25) $a > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} > 0$,

(T26) $0 < a < b \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$,

(T27) $a < b < 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a} < 0$,

(T28) $0 < a < b \Rightarrow a^2 < b^2$, donde $a^2 = aa, b^2 = bb$,

(T29) $a < b < 0 \Rightarrow b^2 < a^2$,

(T30) $a \neq 0 \Leftrightarrow a^2 > 0$,

(T31)

$$(1) \quad ab > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \quad \text{y} \quad b > 0 \\ \qquad \text{ó} \\ a < 0 \quad \text{y} \quad b < 0 \end{cases}$$

$$(2) \quad ab < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \quad \text{y} \quad b < 0 \\ \qquad \text{ó} \\ a < 0 \quad \text{y} \quad b > 0 \end{cases}$$

$$(3) \quad \frac{a}{b} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \quad \text{y} \quad b > 0 \\ \qquad \text{ó} \\ a < 0 \quad \text{y} \quad b < 0 \end{cases}$$

$$(4) \quad \frac{a}{b} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \quad \text{y} \quad b < 0 \\ \qquad \text{ó} \\ a < 0 \quad \text{y} \quad b > 0 \end{cases}.$$

# 2. Funciones reales de una variable real

## 2.1. Funciones

◇ *Definición* (informal): Sean $A$ y $B$ dos conjuntos, una función $f$ de $A$ en $B$ es una correspondencia que a cada elemento de $A$ le asigna un y sólo un elemento de $B$.

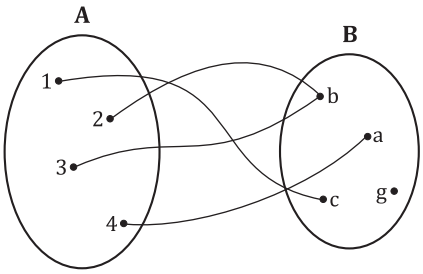
1. Determine, justificando la respuesta, si las siguientes relaciones definen en cada caso una función $f : A \to B$.

   a) $A$ representa el conjunto de padres de Argentina, $B$ representa el conjunto de niños de Argentina y la relación $f$ es "Es padre de..."

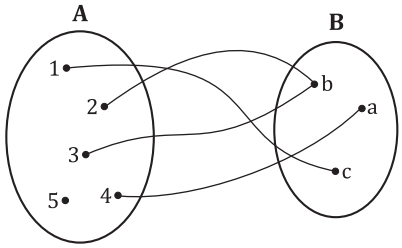
   b) $A$ representa el conjunto de niños de Argentina, $B$ representa el conjunto de madres de Argentina y la relación $f$ es "Es hijo de..."

   c) $A$ representa el conjunto de días del año, $B$ representa el conjunto de estaciones del año y la relación es "Pertenece a la estación..."

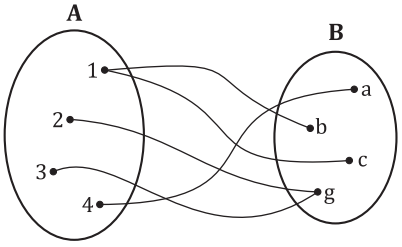
2. Indique si los siguientes diagramas definen una función $f : A \to B$ justificando la respuesta. En caso afirmativo determine el dominio, $D(f)$, y la imagen, $Im(f)$.




(i)




(ii)

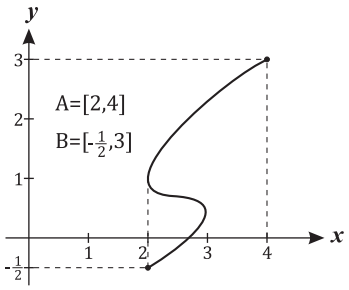



(iii)

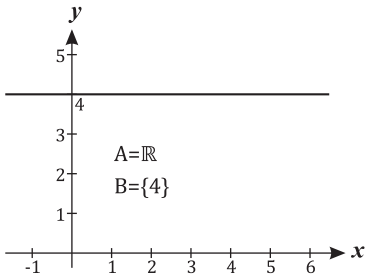
3. Indique si la siguiente tabla define una función $f : A \to B$ justificando la respuesta. En caso afirmativo determine $D(f)$ e $Im(f)$.
   $A = \{q, w, e, r\}$ $\quad B = \{q, w, t, r\}$

| $x$ | $q$ | $w$ | $r$ | $w$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $q$ | $r$ | $w$ | $t$ |

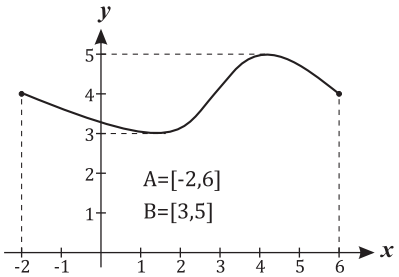
4. Indique si los siguientes gráficos definen una función $f : A \to B$.




(i)




(ii)




(iii)

5. La Figura 1 muestra el gráfico de una función $y = f(x)$.

   a) Estime, de ser posible, el valor de la función en los siguientes puntos: $x = 2$, $x = 4$, $x = 0$.

   b) Indique $D(f)$ e $Im(f)$ usando notación de intervalo.

   c) Estime el valor de $x$ para el cual $f(x) = 2$.

6. Indique, justificando la respuesta, si las siguientes funciones son iguales.

   a) $f(x) = x$; $g(x) = x^2$ b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$; $g(x) = x + 1$

7. a) Halle el área de un:
      i) triángulo equilátero en función del lado $l$.
      ii) círculo en función de su diámetro $d$.

   b) Usando la función hallada en i) encuentre el área cuando $l = 3$.

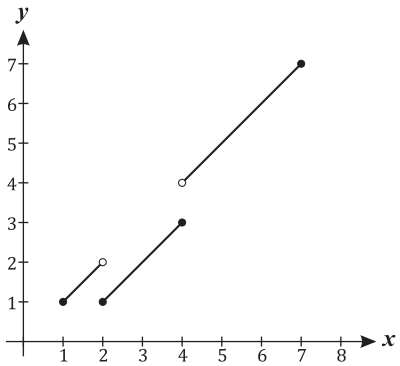



Figura 1: $y = f(x)$

8. a) Halle la superficie y el volumen de:
   i) Un cubo en función de su arista $a$.
   ii) Una esfera en función de su diámetro.

   b) Usando la función hallada en i) encuentre la superficie lateral cuando $a = 5$.

9. a) La altura $h$ de un rectángulo es el triple de su base $x$. Halle en cada caso, el área del rectángulo en función de:
   i) la altura $h$,
   ii*) la diagonal $d$.

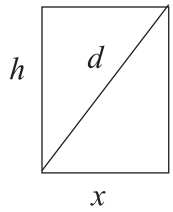
   b) Si la diagonal mide 5 unidades, ¿cuál es el área del rectángulo?

   Ejemplo a)ii). Si $x$ es la base del rectángulo y $h$ la altura, el área del rectángulo es

$$A = xh. \tag{1}$$

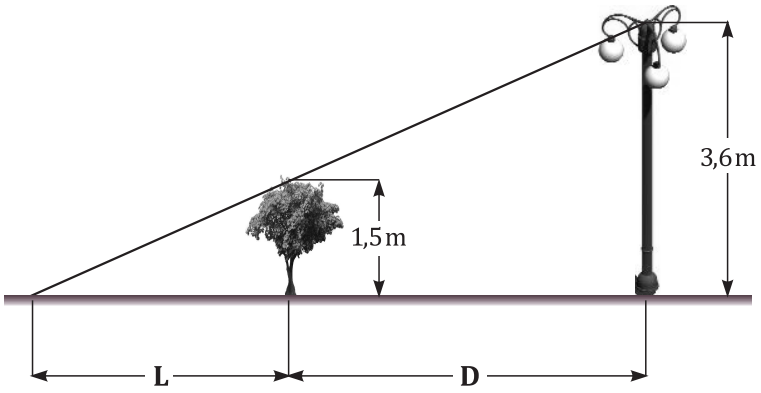
   Sabemos que $h = 3x$, reemplazando en ( 1) resulta que el área en función de la la base $x$ es $A = 3x^2$, por lo tanto, basta hallar $x$ en función de la diagonal $d$ para resolver el problema.
   De la figura podemos afirmar que

$$\begin{aligned} d^2 &= x^2 + (3x)^2 \\ d^2 &= x^2 + 9x^2 \\ d^2 = 10x^2 \Rightarrow x^2 &= \frac{d^2}{10} \end{aligned}$$




   Por lo tanto, $A(d) = \frac{3}{10}d^2$

10. Un árbol de $1{,}50m$ de altura está cerca de un farol de $3{,}6m$ de altura, como muestra la figura. Exprese la longitud $L$ de su sombra en función de la distancia $D$ del pie del árbol a la base del farol.

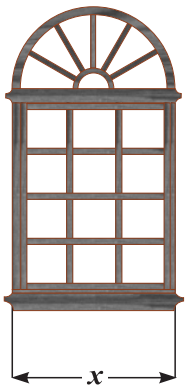



11. Exprese:

a) El área $A$ de un rectángulo de base $b$ y altura $h$ en función de $b$ sabiendo que el perímetro es de $48cm$.
$a_1$) Halle el dominio.
$a_2$) Calcule el valor de $A$ para algún valor del dominio.

b*) El área de un triángulo rectángulo en función de la base sabiendo que la suma de las longitudes de los catetos es $80cm$.
Determine el dominio de la función hallada.

c) El área de una ventana normanda, la cual tiene la forma de un rectángulo con un semicírculo sobrepuesto, en función de su ancho, sabiendo que el perímetro de la ventana es de $12cm$.
Determine el dominio de la función hallada.




Ejemplo b). Sea $x$ la base del triángulo e $y$ su altura. Entonces,

$$A = \frac{xy}{2} \tag{2}$$

Como queremos hallar $A$ en función de $x$, es suficiente hallar $y$ en función de $x$.
Como dato tenemos que la suma de los catetos es 80; por lo tanto,
$x + y = 80 \Rightarrow y = 80 - x$ ; reemplazando $y$ en ( 2) resulta:

$$A(x) = \frac{x(80-x)}{2}.$$

El dominio de $A$ queda determinado por los valores $x$ para los cuales :
$x \geq 0$ e $y = 80 - x \geq 0$, por lo tanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 80\}$.

## 2.2. Dominio, imagen y gráfico de una función real

1. Halle el dominio de las siguientes funciones y escríbalo utilizando la notación de intervalo.

   i) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9$ ii) $f(x) = \sqrt{2x-1}$

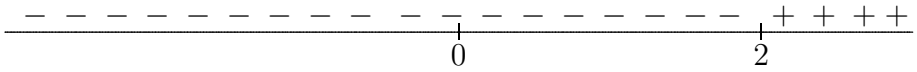
   iii) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}-3}$ iv) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}+3}$

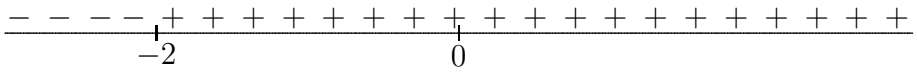
   v*) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-4}{x-1}}$

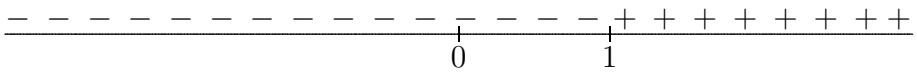
   Ejemplo v). El dominio de $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-4}{x-1}}$ es, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x^2-4}{x-1} \geq 0\}$. Para determinarlo resolvemos, factorizando el numerador, la inecuación equivalente:

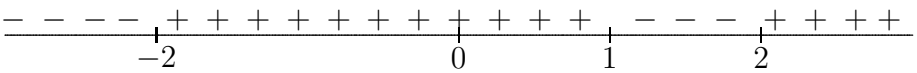
$$\frac{(x-2)(x+2)}{x-1} \geq 0.$$

Estudiamos el signo de la misma a partir de la siguiente representación gráfica:

$sig(x-2)$ 


$sig(x+2)$ 


$sig(x-1)$ 


$sig\frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)}$ 


Vemos entonces que $D(f) = [-2, 1) \cup [2, +\infty)$.

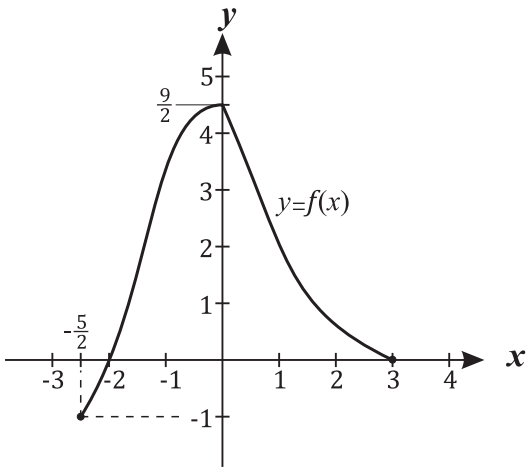



Figura 2: Gráfico de $f$

2. La Figura 2 corresponde al gráfico de una función $f$. A partir de él y sin intentar hallar la expresión de la función, grafique e indique dominio e imagen de las siguientes funciones:

   $a) f_1(x) = f(x-1) \quad b) f_2(x) = f(x) - 1 \quad c) f_3(x) = -f(x+2) \quad d^*) f_4(x) = f(x-3) + 2$

   Ejemplo d).

Paso 1. Graficamos $f(x-3)$ desplazando el gráfico de $f$ tres unidades a la derecha (ver Figura 3).

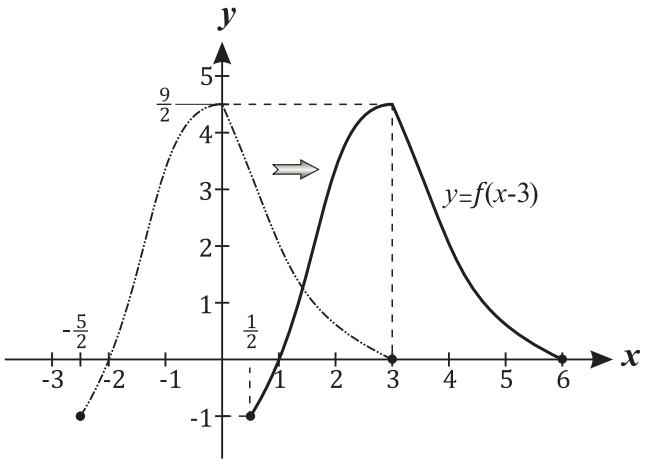



Figura 3: Gráfico de $f(x-3)$

Paso 2. Construimos el gráfico de $f(x-3)+2$ desplazando el gráfico de $f(x-3)$ dos unidades hacia arriba (ver Figura 4).

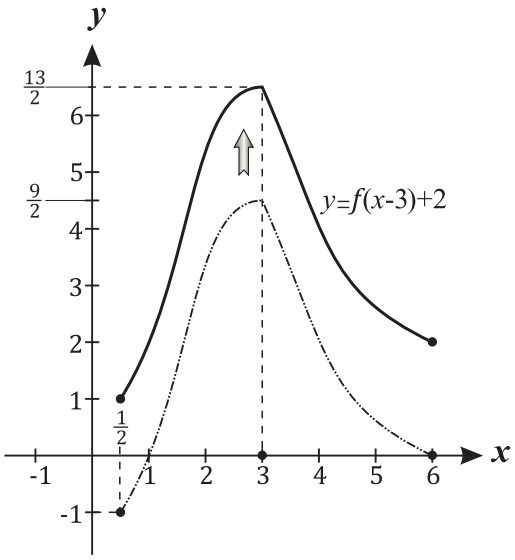



Figura 4: Gráfico de $f(x-3)+2$

$D(f_4) = [\frac{1}{2}\ ,\ 6], \quad Im(f_4) = [1\ ,\ \frac{13}{2}]$.

3. A partir de los gráficos de $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \sqrt{x}$ (ver Figura 5 y 6 ), represente gráficamente las siguientes funciones, indique su dominio e imagen.

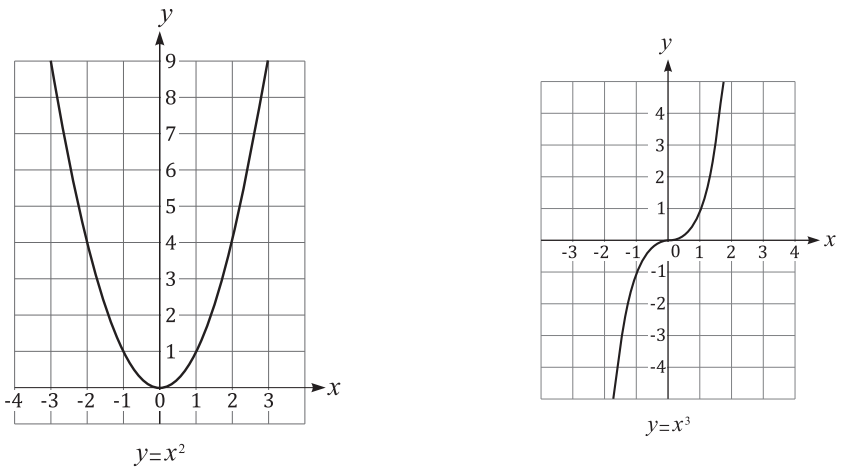



Figura 5: Gráficos

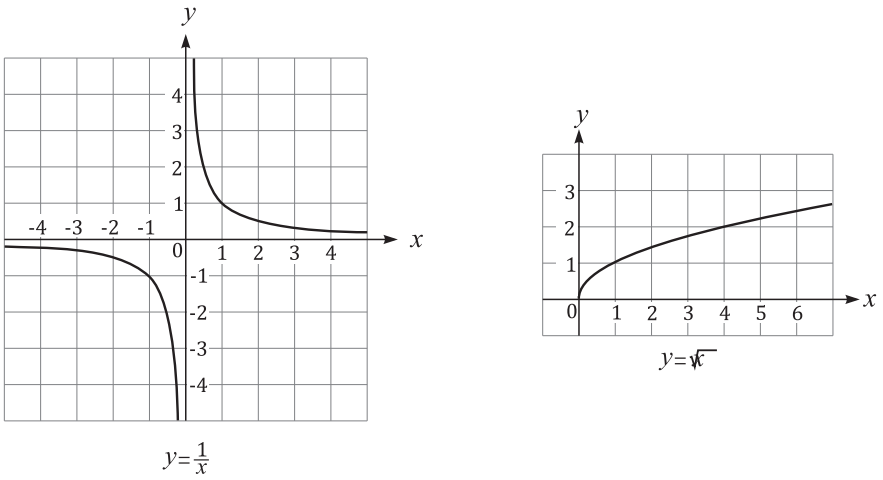



Figura 6: Gráficos

a) $y = \frac{1}{x} + 1$ b) $y = \sqrt{x-2}$ c)$y = -\frac{1}{x}$

d)$y = (x-2)^3$ e) $y = \frac{1}{x+1} + 3$ f) $y = -\sqrt{x+1}$

g)$y = (x+2)^2 - 1$ h) $y = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ i)$y = \begin{cases} (x+3)^2 - 1 & \text{si } x < -3 \\ 0 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

4. Dada $f(x) = \dfrac{1}{x-2} + 1$, determine gráfica y analíticamente los valores $x \in D(f)$ para los cuales:

   a) $f(x) = 0$ b) $f(x) < 0$ c) $f(x) \leq -1$ d) $f(x) > 3$.

5. La Fig. 7 es el gráfico de una función $f$. Las figuras 8, 9 y 10 corresponden a los gráficos de funciones $g_1, g_2$ y $g_3$ respectivamente, expresables en términos de $f$.

   a) Indique el dominio y la imagen de $f$.

   b*) Halle la expresión de $g_i, i = 1, 2^*, 3$ e indique en cada caso el dominio y la imagen.

   Ejemplo b). Trabajamos con $g_2$. Su expresión en términos de $f$ es:
   $g_2(x) = -f(x) + 3$. $D(g_2) = [-2, 4]$, $I(g_2) = [0, 4]$.

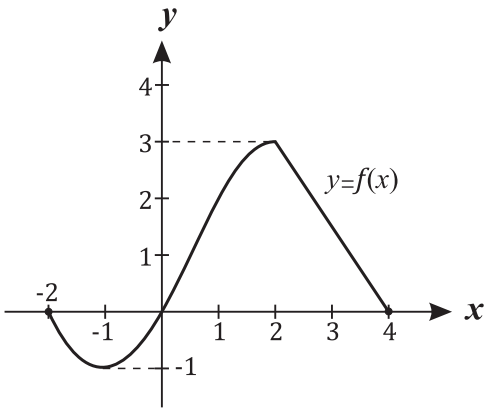



Figura 7: $f$

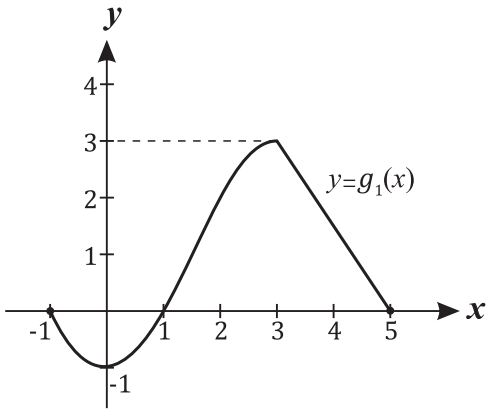



Figura 8: $g_1$

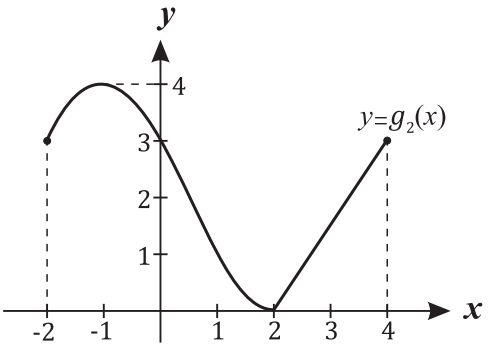



Figura 9: $g_2$

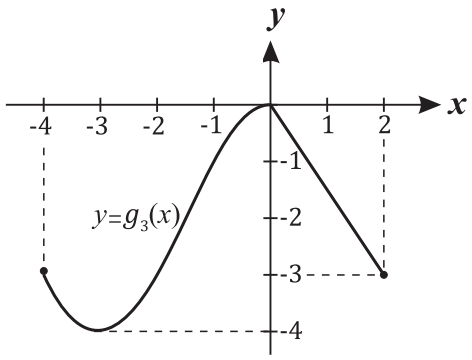



Figura 10: $g_3$

## 2.3. Operaciones entre funciones

◇ Dadas dos funciones $f$ y $g$, para todo $x$ perteneciente a $D(f) \cap D(g)$ se definen las siguientes funciones:

- la suma, denotada $f + g$
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
- la diferencia, denotada $f - g$
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$
- el producto, denotado $f \cdot g$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$
- si $g(x) \neq 0$, el cociente, denotado por $\dfrac{f}{g}$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

**Composición de funciones**
Dadas dos funciones $f$ y $g$, si $Im(g) \cap D(f) \neq \emptyset$ la función compuesta, representada por $f \circ g$ está definida por:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

y su dominio es: $D(f \circ g) = \{x \in D(g) : g(x) \in D(f)\}$.

1. Dadas $f(x) = 2x^2 + 3$ y $g(x) = \dfrac{1}{x+2}$, halle las funciones:

   a) $f + g$ b) $f \cdot g$ c) $\dfrac{f}{g}$

   En cada caso indique el dominio de la función hallada.

2. Dadas $f(x) = x^2 - 2$ y $g(x) = 2x - 1$,

   a) Indique el dominio e imagen de ambas funciones.

   b) Verifique que están definidas las funciones $h_1 = f \circ g$ y $h_2 = g \circ f$ .

   c) Encuentre las expresiones de $h_1$ y $h_2$.

3. Sean $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x + 3$ definidas en $[-1, 2]$ y $[0, 7]$ respectivamente.

   a) A partir de los gráficos de $f$ y $g$, halle $Im(f)$ e $Im(g)$.

   b) Indique si están definidas las funciones $h_1 = f \circ g$ y $h_2 = g \circ f$.

   c) Si es posible, calcule: $h_1(5), h_1(2), h_2(0)$ y $h_2(2)$.

4. Dadas las funciones

   $$f(x) = 3x, \qquad g(x) = \sqrt{1-x} \qquad h(x) = \frac{3x - 15}{x^2}$$

   halle si es posible,
   $(g \circ f)(-1)$, $(f \circ g)(4)$, $(h \circ g)(0)$, $(g \circ h)(2)$.

5. Sean $f(x) = x^3 + 1$ y $g(x) = \dfrac{x}{2}$ . Compruebe que la composición de funciones no verifica la propiedad conmutativa, es decir, $f \circ g \neq g \circ f$.

6. Halle en cada caso, dos funciones $f$ y $g$ de modo que la composición, $f \circ g$ sea la función $h$ indicada.

   a) $h(x) = \sqrt{x+1}$ b) $h(x) = 4(x^3 + 3)$

   c*) $h(x) = \sqrt[5]{x^2 - 1}$ d) $h(x) = \sqrt[5]{x^2} - 1$

Ejemplo c). Definiendo $f(x) = \sqrt[5]{x}$ y $g(x) = x^2 - 1$, resulta
$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$, pues $f(g(x)) = f(x^2 - 1) = \sqrt[5]{x^2 - 1}$.

Cabe señalar que también hubiéramos podido definir $f(x) = \sqrt[5]{x - 1}$ y $g(x) = x^2$ y el resultado sería el mismo, con lo que queremos destacar que hay más de una manera de resolver este ejercicio. Compruébelo.

# 3. Función lineal. Rectas

## 3.1. Función lineal

◇ *Definición:* Una función lineal es una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por la fórmula

$$f(x) = ax + b$$

donde $a$ y $b$ son números reales. El gráfico de $f(x) = ax + b$ es una recta no vertical, $a$ es la pendiente y $b$ la ordenada al origen.

1. Indique cuáles de las siguientes funciones es una función lineal.

   a) $f(x) = -5x$ b) $g(x) = 3x + x^2$ c) $h(x) = 4$

   d) $j(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \geq 1 \\ 3x - 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ e) $r(x) = 0$

2. Grafique las siguientes funciones lineales.

   a) $f(x) = 3x + 1$ b) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ c) $f(x) = \frac{1}{5}x - 2$

   d) $f(x) = -2x$ e) $f(x) = 3$ f) $f(x) = \frac{2}{3}x - 3$

3. Sea la función lineal $f(x) = -\frac{2}{3}x + 5$.

   a) Grafique e indique el dominio y la imagen.
   b) Halle $f(6)$, $f(-1)$ y $f(0{,}75)$.
   c) Halle $a \in D(f)$ tal que $f(a) = 30$.
   d) Halle los valores de $x \in D(f)$ tales que $f(x) \geq 9$.

4. a) Halle la familia de funciones lineales cuya gráfica es una recta de pendiente $\frac{1}{3}$. Grafique tres de estas funciones.
   b) Halle la familia de funciones lineales tales que $f(-2) = 3$. Grafique tres de estas funciones.
   c) Escriba, si es posible, la ecuación de alguna función que pertenezca a ambas familias. Grafique.

5. En una fábrica el costo de producción $C$ de un determinado artículo es una función lineal de la cantidad $x$ de artículos producidos. El costo fijo es de 800 pesos. Se sabe además, que para producir 100 unidades el costo es de 1400 pesos.

   a) Determine analítica y gráficamente la función costo total $C(x)$.
   b) Halle el costo total para producir 200 y 1000 unidades, respectivamente.
   c) Indique el dominio de la función.

6. En un depósito hay 200 litros de agua, al quitar el tapón se vacía a una velocidad constante de 40 litros por minuto.

   a) ¿Cuánto tiempo tardará en vaciarse?

   b) Escriba la expresión que da la cantidad $C$ de agua en el depósito en función del tiempo $t$ e indique si es una función lineal.

   c) Determine el dominio y la imagen de la función $C(t)$. Grafique la función.

7. Exprese el perímetro de un trapecio isósceles en función de la longitud de la base mayor $B$, sabiendo que la base menor $b$ excede en 2 unidades la tercera parte de la base mayor y los lados iguales miden 5 unidades menos que la base mayor. Determine el dominio de la función. ¿Es la función hallada una función lineal?

8. Sean las funciones lineales: $y = f(x) = 3x - 2$ con $x \in (0, +\infty)$ e $y = g(x) = -\frac{1}{2}x + 1$ con $x \in [-4, 4]$.

   a) Grafique ambas funciones e indique la imagen de cada una de ellas.

   b) Calcule, si es posible, $f(0)$, $f(1)$, $g(-4)$ y $g(5)$.

   c) ¿Para qué valores de $x \in D(f)$ es $f(x) < 0$?

   d) Halle las funciones $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ y $\frac{f}{g}$. Indique el dominio de las funciones halladas.

9. Las funciones $f$ y $g$ son las del ejercicio anterior.

   a) Indique si la función $h_1 = f \circ g$ está definida y en tal caso, halle su expresión.

   b) Calcule, si es posible, $(f \circ g)(-2)$, $(f \circ g)(2)$ y $(f \circ g)(4)$. En caso de no ser posible explique por qué.

   c) Indique si la función $h_2 = g \circ f$ está definida y en tal caso, halle su expresión.

10. a) Grafique las funciones

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \geq 1 \\ 3 & \text{si } x < 1 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \geq 0 \\ 4x - 1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x > -1 \\ 5 & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

    e indique el dominio y la imagen.

    b) Calcule, si es posible, $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$, $g(-3)$, $g(0)$, $g(4)$, $h(-1)$, $h(5)$ y $g(z+1)$ si $0 < z$.

11. De una cierta tabla se extraen los siguientes datos
    $f(3) = 7 \quad f(18) = 42 \quad f(5) = 20$
    ¿Representa dicha tabla una función de proporcionalidad directa? Justifique.

12. Sea $y$ una función de proporcionalidad directa con respecto a $x$ y $P = (-3, 42)$ un punto del gráfico de la función.

a) Halle la constante de proporcionalidad y la función $y = f(x)$.

b) Halle el valor de la función para $x = \frac{1}{7}$.

13. Sea $P = P(C)$ la función que representa el precio de un producto en función del costo del mismo. Si para un determinado producto el precio $P$ se obtiene incrementando el costo $C$ en un 40 por ciento ¿es el precio directamente proporcional al costo? En caso afirmativo, halle la constante de proporcionalidad y escriba la ecuación de la función $P(C)$. ¿Es $P(C)$ una función lineal?

14. La primera tabla corresponde a Madera de pino, la segunda a Corcho sintético y la tercera a Granito. El peso $P($ en kilos) de cada uno de los materiales es directamente proporcional al volumen $V$ (en $dm^3$).

| $Volumen$ | 1 | 5 | 10 | 20 |
|---|---|---|---|---|
| $Peso$ | | | 9 | |

| $Volumen$ | 1 | 5 | 10 | 20 |
|---|---|---|---|---|
| $Peso$ | | | 2 | |

| $Volumen$ | | 5 | 10 | |
|---|---|---|---|---|
| $Peso$ | 60 | | 30 | 3 |

a) Halle la función $P(V)$ y complete las tablas.

b) Represente gráficamente las tres funciones.

c) Determine el volumen que ocupa $7kg$ de madera y el que ocupa $7kg$ de corcho sintético.

## 3.2. Rectas

1. a) Indique si los puntos $A = (2, 3)$, $B = (3, 1)$ y $C = (-2, 1)$ pertenecen a la recta de ecuación $y = \frac{2}{3}x - 1$.

   b) Cuatro puntos $A$, $B$, $C$ y $D$ pertenecen a la recta $3x - 2y - 6 = 0$, sus abscisas son 4, 0, 2 y $\frac{2}{5}$, respectivamente. Determine las ordenadas de los puntos.

2. a) Si es posible escriba la ecuación de una recta:

   i) que pase por el punto $A = (1, -3)$.

   ii) de pendiente positiva, ordenada al origen negativa y que pase por el punto $Q = (-1, 2)$.

   iii) que pase por el punto $P = (-3, 2)$ y cuya ordenada al origen diste 4 unidades del origen de coordenadas.

   b) Grafique las rectas halladas.

3. En cada caso, encuentre la ecuación de la recta que:

   a) Tiene pendiente 2 y ordenada al origen $-3$.

   b) Pasa por los puntos $P = (-2, 1)$ y $Q = (-1, 7)$.

   c) Pasa por el punto $P = (2, 3)$ y corta al eje de abscisas en $x = -1$.

d) Pasa por el punto $Q = (2, -2)$, y corta al eje de ordenadas en $y = 3$.

e) Pasa por el origen y el punto $A = (5, 3)$.

f) Corta a los ejes coordenados en $y = -2$ y en $x = 4$.

g) Pasa por los puntos $A = (1, -3)$ y $B = (5, -3)$.

h) Pasa por los puntos $A = (4, -3)$ y $B = (4, 2)$.

4. Encuentre la ecuación de la recta que:

a) Pasa por el punto $A = (1, 3)$ y es paralela a la recta $y = \frac{1}{3}x - 2$.

b) Es paralela a la recta $y = 6$ y pasa por el punto $C = (\frac{1}{2}, -5)$.

c) Es paralela al eje de ordenadas y pasa por el punto $M = (-1, 4)$.

d) Es perpendicular a la recta $2x + 3y = 4$ y pasa por el origen.

e) Es perpendicular a la recta $y = -2x + 5$ y pasa por el punto $Q = (-1, -2)$.

f) Es vertical y pasa por el punto $A = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{5})$.

g) Es paralela a la recta $x + 4y + 8 = 0$ y pasa por el punto $Q = (6, -2)$.

h) Corta al eje de abscisas en $x = \frac{1}{2}$ y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $A = (\sqrt{2}, \frac{3}{2})$ y $B = (2\sqrt{2}, 2)$.

5. Determine, en cada caso, el o los valores de $k$ para los cuales la recta de ecuación $kx + (2k + 1)y + 3 = 0$,

a) es vertical.

b) tiene pendiente igual a $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

6. Determine, en cada caso, el o los valores de $k$ para los cuales la recta de ecuación $kx + 3y - (5 + k) = 0$,

a) corta en un punto a la recta $4x + 2y = 7$.

b) pasa por el punto $P = (k, k + \frac{5}{3})$.

c) es perpendicular a la recta $x = \frac{1}{2}$.

7. Determine analíticamente si los puntos $A = \left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{12}\right)$, $B = \left(2, -\frac{8}{3}\right)$ y $C = \left(-\frac{4}{7}, \frac{25}{21}\right)$ están alineados.

8. a) Calcule la distancia entre los siguientes pares de puntos.

   i) $P = (3, -8)$ y $Q = (2, -6)$, ii) $P' = \left(\frac{1}{4}, 0\right)$ y $Q' = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

   b) Halle un valor de $a$ tal que la distancia entre $P = (a, 2)$ y $Q = (-1, 3)$ sea $\sqrt{2}$. Es única la solución? Interprete geométricamente.

9. Dados los puntos $A = \left(\frac{8}{5}, \frac{1}{3}\right)$ y $M = \left(\frac{9}{5}, -\frac{1}{2}\right)$, encuentre las coordenadas del punto $B$ sabiendo que $M$ es el punto medio de $A$ y $B$.

   ◇ Recuerde que si $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$, el **punto medio** del segmento $\overline{AB}$ es $M = \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$.

10. Dados los puntos $A = (6, 4)$ y $B = (-2, 0)$, encuentre la ecuación de la recta mediatriz del segmento AB y grafique.

    ◇ Recuerde que la **mediatriz** del segmento $\overline{AB}$ es la recta $L$ perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pasa por el punto medio de dicho segmento.

11. Verifique analíticamente que los puntos $A = (1, -3)$, $B = (-2, 4)$ y $C = (3, 2)$ son los vértices de un triángulo isósceles. Calcule su perímetro.

12. Demuestre que los puntos $A = (3, 3)$, $B = (11, 5)$ y $C = (8, 17)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

13. Dada la recta $y = -7x$, halle las coordenadas de los puntos de la misma que se encuentran a 5 unidades del origen de coordenadas. Grafique.

14. Una empresa fabrica dos calidades diferentes de pintura. Fabricar cada unidad de calidad A requiere 5 horas-máquina y cada unidad de calidad B requiere 2 horas-máquina. La empresa tiene 280 horas-máquina disponibles por semana. Sea $x$ la cantidad semanal que se fabrica del producto de calidad A e $y$ la cantidad semanal que se fabrica del producto de calidad B.

    a) Halle la ecuación que relaciona $x$ e $y$ si se emplean todas las horas-máquina.

    b) ¿Cuántas unidades de A pueden fabricarse como máximo si se fabrican 50 unidades de B?

15. El Dr. Cormillot propone desayunar yogur, ensalada de frutas o una combinación de ambos, de modo tal que se consuman 250 calorías. El yogur tiene 110 calorías cada $100grs$ y la ensalada de frutas tiene 85 calorías cada $100grs$. Si se combinan ambos, sea $x$ la cantidad en gramos de yogur e $y$ la cantidad en gramos de ensalada de frutas.

    a) Escriba la ecuación que relaciona $x$ e $y$

    b) ¿Qué cantidad de yogur se puede comer si se ingieren $140grs$ de ensalada de frutas?

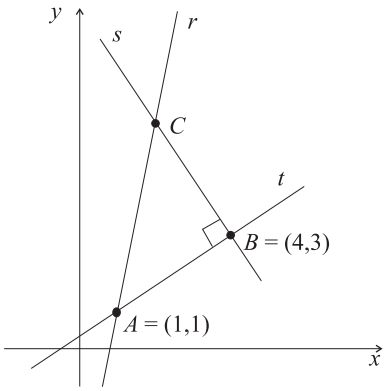
c) ¿Qué cantidad máxima de yogur se puede ingerir en el desayuno con esta dieta?

16. Dados los puntos $A = (1, 1)$, $B = (4, 3)$ y la recta $r$ de ecuación $y = 5x - 4$ indicados en la figura, halle:

a) El vértice $C$ del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ rectángulo en $B$.

b) La medida del segmento $\overline{AC}$.

c) El área del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$.

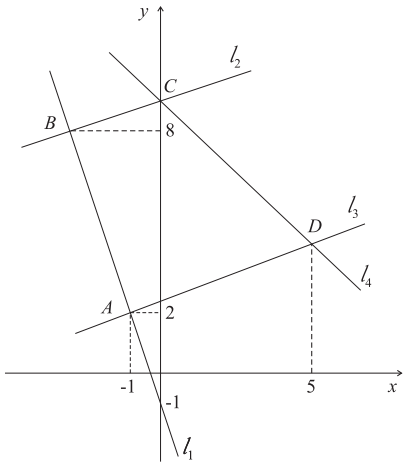



17. Los puntos $A$, $B$, $C$ y $D$ son los vértices de un trapecio rectángulo. Con la información del siguiente gráfico, obtenga:

a) las ecuaciones de las rectas que contienen a sus lados.

b) las coordenadas de los vértices.

c) el perímetro y el área del trapecio.



# 4. Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

## 4.1. Clasificación y resolución

1. Clasifique y resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales. Si el sistema resulta compatible indeterminado, dé la solución general y dos soluciones particulares. Interprete geométricamente en cada caso.

a) $\left\{ \begin{array}{rcl} x-3y &=& 1 \\ 2x+6y &=& 4 \end{array} \right.$ b*) $\left\{ \begin{array}{rcl} 16y &=& 3x+5 \\ 19 &=& 28y+5x \end{array} \right.$ c) $\left\{ \begin{array}{rcl} 5x+y-4 &=& 0 \\ 10x+2y &=& 4 \end{array} \right.$

d) $\left\{ \begin{array}{rcl} 2x &=& 3y-1 \\ 4x &=& 6y+2 \end{array} \right.$ e) $\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{x+y}{3}+y &=& 15 \\ \frac{x-y}{5}+y &=& 25 \end{array} \right.$ f) $\left\{ \begin{array}{rcl} -2x+4 &=& 3y \\ 9y &=& 12-6x \end{array} \right.$

Ejemplo b).

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 16y &=& 3x &+& 5 \\ 19 &=& 28y &+& 5x \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcrcr} -3x &+& 16y &=& 5 \\ 5x &+& 28y &=& 19. \end{array} \right.$$

Clasificación: Observemos si hay o no proporcionalidad entre los coeficientes de $x$ e $y$. Como $-\frac{3}{5} \neq \frac{16}{28}$, el sistema es compatible determinado, por lo que tiene solución única.

Resolución: Resolvamos el sistema mediante el método de sustitución:

i) Despejamos $y$ en la primera ecuación:

$$-3x+16y=5 \Longrightarrow 16y=5+3x \Longrightarrow y=\frac{5+3x}{16} \Longrightarrow y=\frac{5}{16}+\frac{3}{16}x.$$

ii) Reemplazamos lo obtenido en la segunda ecuación y despejamos $x$:

$$\begin{array}{rcl} 5x+28y &=& 19 \\ 5x+28\left(\frac{5}{16}+\frac{3}{16}x\right) &=& 19 \\ 5x+\frac{35}{4}+\frac{21}{4}x &=& 19 \\ \frac{41}{4}x &=& 19-\frac{35}{4} \\ \frac{41}{4}x &=& \frac{41}{4} \\ x &=& 1. \end{array}$$

iii) Reemplazamos el valor de $x$ en cualquiera de las dos ecuaciones para hallar el valor de $y$. Como $x=1$, obtenemos

$$-3(1)+16y = 5$$

$$\begin{aligned} -3+16y &= 5 \\ 16y &= 5+3 \\ 16y &= 8 \\ y &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Luego la solución del sistema es $x = 1$, $y = \frac{1}{2}$.

Interpretación geométrica: Las rectas de ecuación $16y = 3x + 5$ y $19 = 28y + 5x$ son incidentes y su punto de intersección es $P = \left(1, \frac{1}{2}\right)$.

2. Complete el siguiente cuadro con una ecuación de modo tal que con la ecuación dada resulte un sistema compatible determinado, indeterminado o incompatible.

| | Compatible determinado | Compatible indeterminado | Incompatible |
|---|---|---|---|
| $2x - 3y = 2$ | | | |
| $x = 7$ | | | |
| $3x + 2y - 5 = 0$ | | | |

3. Elija el sistema que tiene por solución el conjunto $S = \left\{\left(x, \frac{1}{2}x + 1\right) : x \in \mathbb{R}\right\}$.

a) $\left\{ \begin{array}{rcl} -x + 2y &=& 2 \\ 2x - 3y &=& -1 \end{array} \right.$ b) $\left\{ \begin{array}{rcl} 2,5x - 5y &=& -5 \\ -3x + 6y &=& 6 \end{array} \right.$

c) $\left\{ \begin{array}{rcl} 4x - 8y &=& -8 \\ -3x + 6y &=& 5 \end{array} \right.$

4. Halle las constantes reales $a$ y $b$ de forma tal que $P = (2, 1)$ sea una solución del sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + ay &=& b + 2 \\ 2ax + (b+4)y &=& 21. \end{array} \right.$$

Escriba el sistema resultante, verifique que es compatible indeterminado y que $P$ es una solución particular. Escriba la solución general.

5. Dado el sistema $\left\{ \begin{array}{rcl} -ax + y &=& 2a - 5 \\ 2x - y &=& a - 7 \end{array} \right.$

a*) halle la constante $a$ para que el sistema resulte incompatible. Verifique.

b*) halle la constante $a$ y la ordenada de $P$ si el punto $P = (0, y_P)$ es la única solución del sistema. Verifique.

Ejemplo a). (a) El sistema será incompatible si

$$-\frac{a}{2} = \frac{1}{-1} \neq \frac{2a-5}{a-7}.$$

De la igualdad resulta $a = 2$ y para este valor se tiene

$$\frac{2a-5}{a-7} = \frac{1}{5} \neq -1.$$

b) Para que $P = (0, y_P)$ sea solución del sistema reemplazamos en ambas ecuaciones y obtenemos

$$\begin{cases} y_P &= 2a-5 \\ -y_P &= a-7, \end{cases}$$

o sea $y_P = 2a - 5 = -(a-7)$, de donde resulta $a = 4$ e $y_P = 3$. Con $a = 4$ el sistema resulta compatible determinado ya que $-\frac{4}{2} \neq -1$.

6. Determine en cada caso el valor de $k$ de modo que el sistema dado sea compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

(a) $\begin{cases} -2x + 10y &= k-3 \\ (k-1)x - 30y &= -12 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 5x - ky - 8 &= 0 \\ 15x + 6y - 16 + 4k &= 0 \end{cases}$

7. Determine si las rectas $L_1$ y $L_2$ son incidentes, paralelas no coincidentes o paralelas coincidentes. En caso de ser incidentes halle analíticamente el punto de intersección y verifique gráficamente el resultado hallado.

   a) $L_1 : -3x + y - 2 = 0$; $L_2 : x - 2y - 6 = 0$.

   b) $L_1 : 2y - 8x + 2 = 0$; $L_2 : 4x - y - 6 = 0$.

   c) $L_1 : y = \frac{1}{2}x - 2$; $L_2 : 4x - 2y - 7 = 0$.

## 4.2. Problemas

Resuelva los siguientes problemas mediante el planteo y la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

1. Un padre, para estimular a su hijo a que estudie matemática, le propone el siguiente juego: por cada ejercicio bien resuelto el padre le entrega \$15 y por cada uno que esté mal, el hijo le dará al padre \$10. Al final del ejercicio 28, el hijo lleva recaudados \$195. ¿Cuántos ejercicios ha resuelto bien y cuántos mal?

2. Hay 112 pelotas de golf distribuidas en 2 cajas. Si se sacan 26 pelotas de una caja y se las coloca en la otra, quedan las dos con igual cantidad de pelotas. ¿Cuántas pelotas había inicialmente en cada caja?

3. Calcule los lados de un romboide sabiendo que su perímetro es de 54 cm y que su lado mayor es igual al lado menor aumentado en un 25 %.

4. Un inversionista compra acciones y bonos por \$18 000 y los vende por \$18 360. Si gana el 10 % en la venta de los bonos y pierde el 8 % en la venta de las acciones, ¿cuánto invirtió en cada uno?

5. Se cambian \$300 en monedas por billetes. Si hay un total de 705 monedas de \$1 y de 25 centavos y se reciben 39 billetes de \$20 y \$5,

   a) ¿cuántas monedas de \$1 y cuántas de 25 centavos se entregan?

   b) ¿cuántos billetes de \$20 y cuántos de \$5 se reciben?

6. ¿Cuál es la fracción tal que si se suma 1 al numerador y al denominador se obtiene $\frac{1}{2}$ y si se resta 2 al numerador y al denominador se obtiene $\frac{1}{5}$?

7. Un número de dos cifras es tal que el triple de la cifra de las decenas es igual al doble de la cifra de las unidades y si se permutan las cifras se obtiene un número 18 *unidades* mayor que él. ¿Cuál es el número?

8. El cociente de dos números es 11 y el resto, 12. Si la suma de los números es 624, ¿cuáles son los números?

9. Una empresa desea comprar la mayor cantidad posible de dos artículos A y B que utiliza en su proceso productivo y consigue a un precio muy conveniente. La tabla que sigue indica el precio por unidad de cada artículo y el volumen que ocupa cada uno de ellos.

| | Artículo A | Artículo B |
|---|---|---|
| Costo por unidad | \$3 | \$2,50 |
| Volumen por unidad | 12 $dm^3$ | 16 $dm^3$ |

   Si dispone, para comprar, \$15 000 y como máximo 78 $m^3$ de espacio para almacenar, ¿qué cantidad de artículos de cada clase puede comprar?

10. Un laboratorio de productos químicos prepara dos tipos de soluciones ácidas. Una de ellas contiene 30 % de ácido y la otra, 25 % de ácido. ¿Cuántos litros de cada tipo deberá mezclar para obtener 200 litros de una mezcla que contenga 27 % de ácido?

# 5. Función cuadrática y ecuación de segundo grado

## 5.1. Funciones cuadráticas

◇ *Definición:* Una función cuadrática es una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por la fórmula

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde $a$, $b$ y $c$ son números reales y $a \neq 0$. Esta expresión de la función cuadrática es llamada forma polinómica.

1. a) Determine cuál de las siguientes funciones es una función cuadrática.
   i) $f(x) = -(\pi x^2 + 5)$ ii) $f(x) = -\sqrt{2}\, x^2 + 5$ iii) $f(x) = -3x(x+1)$
   iv) $f(x) = \sqrt{2\, x} + x$ v) $f(x) = x^2 - x(x+1)$ vi) $f(x) = x^{-2} + x$
   vii) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2}{x}$
   b) Para los casos en que la expresión define una función cuadrática, determine analíticamente si el gráfico de dicha función pasa por el punto $A = (0, 5)$.

2. a) Halle la expresión de una función cuadrática tal que su gráfico pase por los puntos $A = (0, 3)$, $B = (-1, 2)$ y $C = (1, 0)$.
   b) ¿Existe alguna función cuadrática $f$ tal que $f(0) = 1$, $f(3) = 4$ y $f(5) = 6$? Justifique.

◇ El gráfico de una función cuadrática es una parábola con eje de simetría vertical. La ecuación canónica de una parábola de vértice $V = (h, k)$ es

$$y = a(x - h)^2 + k.$$

El signo de $a$ indica la concavidad de la parábola: hacia arriba, si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$, según se observa en la Figura 11.

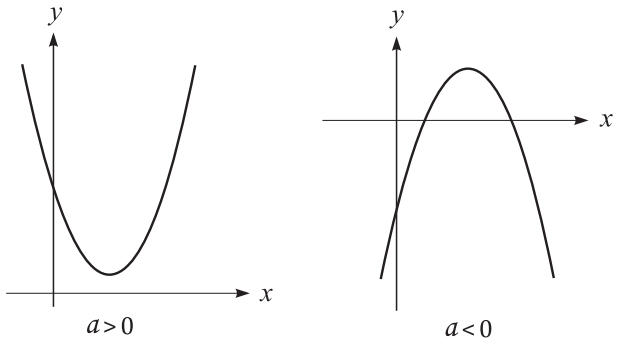



Figura 11: Concavidad

Para hallar la ecuación canónica de la parábola, gráfico de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, se procede de la siguiente manera:

• Sacamos factor común $a$ en la expresión de la función

$$f(x) = a(x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{c}{a})$$

• Multiplicamos y dividimos por 2 al término lineal

$$f(x) = a(x^2 + 2\tfrac{b}{2a}x + \tfrac{c}{a})$$

• Sumamos y restamos el cuadrado de $\frac{b}{2a}$

$$f(x) = a(x^2 + 2\tfrac{b}{2a}x + (\tfrac{b}{2a})^2 - (\tfrac{b}{2a})^2 + \tfrac{c}{a})$$

• Aplicamos la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma de la siguiente manera

$$f(x) = a[x^2 + 2\tfrac{b}{2a}x + (\tfrac{b}{2a})^2] - a(\tfrac{b}{2a})^2 + a\tfrac{c}{a}$$

• Observamos que la expresión cuadrática que aparece dentro del corchete es el cuadrado de un binomio

$$f(x) = a(x + \tfrac{b}{2a})^2 + c - \tfrac{b^2}{4a}.$$

También puede escribirse de la forma

$$f(x) = a(x + \tfrac{b}{2a})^2 - \tfrac{b^2-4ac}{4a}.$$

Este procedimiento se conoce como "completamiento de cuadrados" y permite hallar las coordenadas del vértice:

$$V = \left(-\tfrac{b}{2a}, -\tfrac{b^2-4ac}{4a}\right).$$

3. Considere la función cuadrática $f(x) = -x^2 + x + 2$.

   a) Sabiendo que el gráfico de $f(x)$ es una parábola, halle las coordenadas del vértice de esa parábola, mediante completamiento de cuadrados.

   b) Trace el gráfico de $f$.

   c) Indique el dominio y la imagen de $f$.

   d) Determine el valor máximo o mínimo de $f$, según corresponda y el valor de $x$ donde alcanza dicho máximo o mínimo.

   e) Sin ayuda del gráfico de $f$, halle un punto que pertenezca y otro que no pertenezca a ese gráfico.

$\diamond$ El problema de hallar los puntos de intersección del gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ con el eje $x$, conduce a la necesidad de resolver la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{3}$$

(¿Puede decir por qué esto es así? ) Es decir, debemos hallar, si existen, las raíces de la ecuación (3). Recordemos que llamamos discriminante de la ecuación a

$$\Delta = b^2 - 4ac \ .$$

El símbolo $\Delta$ se lee "delta". Se tiene entonces que, si:

a) $\Delta > 0 \Rightarrow$la ecuación tiene dos raíces reales distintas

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

b) $\Delta = 0 \Rightarrow$la ecuación tiene una raíz real doble $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.

c) $\Delta < 0 \Rightarrow$la ecuación no tiene raíces reales.

Por lo tanto, en el primer caso, el gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$ intersecta al eje $x$ en dos puntos $P_1 = (x_1, 0)$ y $P_2 = (x_2, 0)$. En el segundo caso, el gráfico corta en un único punto $P(x_1, 0)$, y en el último de los casos, el gráfico no corta al eje $x$. Observe la Figura 12 (con $a > 0$).

Por otra parte, si la parábola intersecta al eje $x$, su ecuación puede escribirse de la forma:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) \text{ si } x_1 \neq x_2 \quad \text{o} \quad y = a(x - x_1)^2 \text{ si } x_1 = x_2.$$

De ahí que, en este caso, la función cuadrática se puede representar de tres maneras distintas:

| **polinómica** | **canónica** | **factorizada** |
|---|---|---|
| $f(x) = ax^2 + bx + c$ | $f(x) = a(x - h)^2 + k$ | $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ |

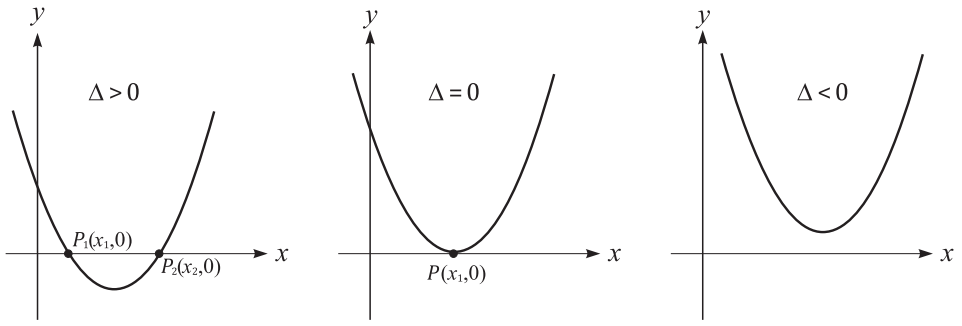



Figura 12: Discriminante

4. Dadas las funciones cuadráticas

$$\text{a) } y = x^2 + 4x \qquad \text{b}^*)y = -\tfrac{1}{6}x^2 - \tfrac{1}{6}x + 2 \qquad \text{c)} y = x^2 - 9x + 9$$

i) Transfórmelas en expresiones de la forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$.

ii) Halle las intersecciones del gráfico con los ejes coordenados.

iii) Represente las parábolas correspondientes.

iv) Halle analíticamente el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0\}$.

Ejemplo b).

i)

$$y = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}x + 2 = -\frac{1}{6}(x^2 + x - 12) = -\frac{1}{6}(x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 12)$$

$$= -\frac{1}{6}(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{6}(-\frac{49}{4}) = -\frac{1}{6}(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{49}{24}$$

.

ii) El gráfico corta al eje $x$ en los puntos en los cuales $y = 0$. Por lo tanto debemos resolver la ecuación $y = f(x) = 0$ siguiente:

$$-\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0,$$

cuyas soluciones son:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2}$$

Por lo tanto $x_1 = 3$ y $x_2 = -4$, de donde se deduce que la parábola corta al eje $x$ en los puntos $(3, 0)$ y $(-4, 0)$.

El gráfico corta al eje $y$ en los puntos en los cuales $x = 0$, es decir debemos calcular:

$$y = f(0) = -\frac{1}{6} \cdot 0^2 - \frac{1}{6} \cdot 0 + 2 = 2.$$

Por lo tanto, la parábola corta al eje $y$ en el punto $(0, 2)$.

iii) El gráfico de la función es el que se muestra en la Figura 13.

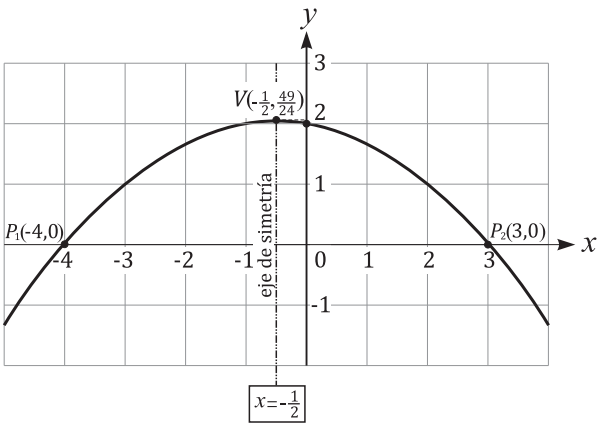



Figura 13:

iv) Debemos resolver la inecuación $y = f(x) \geq 0$:

$$y = -\frac{1}{6}(x^2 + x - 12) = -\frac{1}{6}(x - 3)(x + 4) \geq 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 4) \leq 0.$$

Es decir, se debe cumplir una de las dos situaciones siguientes:

1. $x - 3 \leq 0$ y $x + 4 \geq 0 \Rightarrow x \leq 3$ y $x \geq -4 \Rightarrow x \in [-4, 3]$.
2. $x - 3 \geq 0$ y $x + 4 \leq 0 \Rightarrow x \geq 3$ y $x \leq -4$, lo cual no es posible.

Por lo tanto se verifica que el conjunto pedido es $A = [-4, 3]$.

5. Encuentre una función cuadrática que tenga a $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$ como ceros y cuyo gráfico pase por el punto $A = (0, 10)$.

6. Halle una función cuyo gráfico sea una parábola de eje de simetría vertical con vértice en el punto $B = (1, -2)$ y que pase por $C = (4, 16)$.

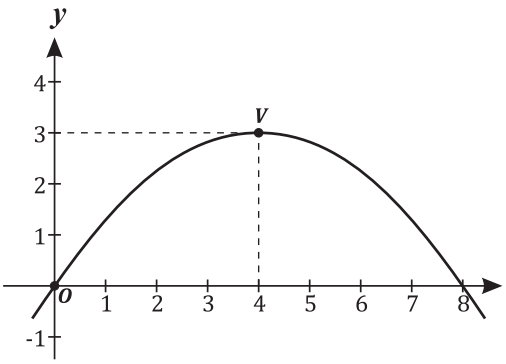
7. ¿Cuánto debe valer $b$ para que la parábola de ecuación $y = x^2 + bx + 3$ tenga vértice en el punto $E = (2, -1)$?

8. Se desplaza el vértice de la parábola de ecuación $y = x^2$ hacia el punto $F = (2, -3)$. Escriba la ecuación de la nueva parábola y la ecuación de su eje de simetría. Grafique.

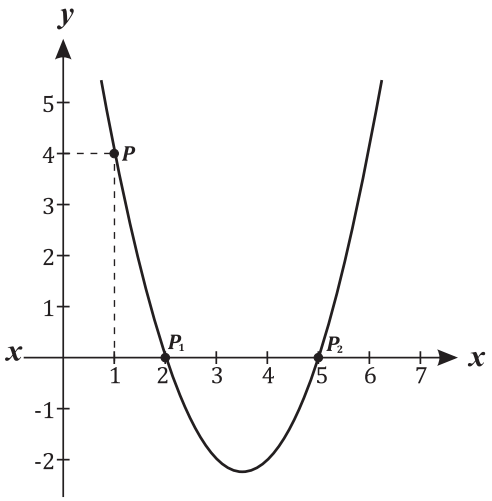
9. A partir de los datos que figuran en la siguiente tabla, complete los cuadros en blanco en los casos en que sea posible, y, de tratarse de una función cuadrática, esboce el gráfico de la parábola correspondiente:

| Forma Polinómica | Forma Canónica | Pto.∩ eje $y$ | Ptos. ∩ eje $x$ | Vértice | Imagen | Concav. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = x^2 + 1$ | | | | | | |
| | $y = -(x-1)^2 + 3$ | | | | | |
| | $y = (x-1)^2 + k$ | | | | $[2, +\infty)$ | |
| | | | $P = (-3, 0)$ | $V = (h, 2)$ | | |

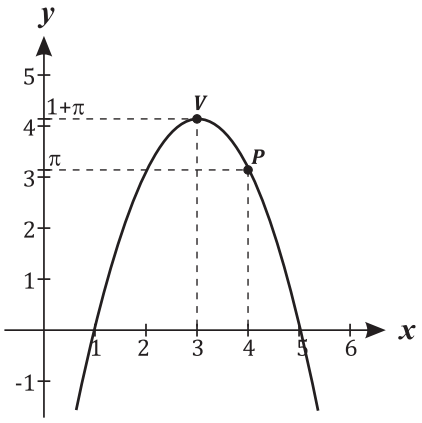
10. Halle, en cada caso, si es posible, la ecuación de la función cuadrática utilizando como datos los puntos **remarcados** en los gráficos a), b) y c).




a)




b)




c)

11. Sea $g(x) = x^2+1$, halle en cada caso la expresión y dibuje el gráfico de la función indicada.

    a) $h_1(x) = g(x-1)$

    b) $h_2(x) = g(x) - 1$

    c) $h_3(x) = -g(x) + 1$

    d) $h_4(x) = g(x-1) + 1$

12. Sean $f(x) = x^2$, $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ y $g(x) = -x$, $g : [-2, 0] \to \mathbb{R}$.

    a) Determine el dominio y la imagen de $f$ y de $g$.

    b) Compruebe que está definida la función $h_1 = f \circ g$.

    c) Halle la expresión de $h_1(x) = (f \circ g)(x)$ y de $h_2(x) = -f(g(x)) + 2$.

13. Sean $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $g : [-5, 0] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = x + 4$.
    Sin hallar la expresión de $f \circ g$, calcule si es posible, $(f \circ g)(-4)$, $(f \circ g)(-3)$ y $(f \circ g)(3)$.

14. a) Grafique la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{si} \quad x < 2 \\ 2 - x & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases} \tag{4}$$

    y calcule $f(-3)$,$f(2)$,$f(4)$ y $f(t-1)$ si $t > 5$.

    b) Grafique la función

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 & \text{si} \quad x < 1 \\ (x-1)^2 - 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \tag{5}$$

    y calcule, de ser posible, $f(-1)$, $f(1)$, $f(2)$ y $f(3t-1)$ si $t < 0$.

15. La Figura 14 corresponde al gráfico de la función $g(x) = x^2$ con $x \in [-1, 2]$.

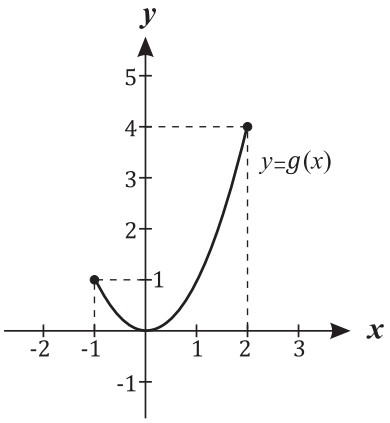
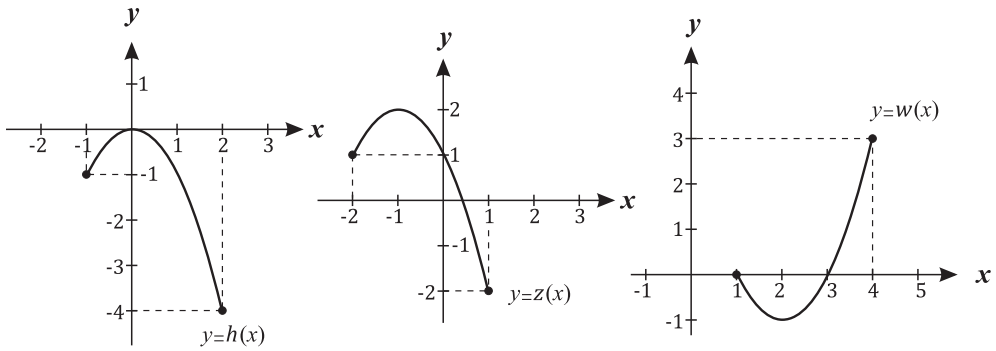



Figura 14: Gráfico de $g(x) = x^2$, $x \in [-1, 2]$

La Figura 15 muestra los gráficos de las funciones $h(x)$, $z(x)$ y $w(x)$ respectivamente, las que se obtuvieron a partir del gráfico de $g$.




a) $h(x)$ b) $z(x)$ c) $w(x)$

Figura 15: Desplazamientos

a) Indique el dominio y la imagen de $g$.

b*) Halle las expresiones de $h$, $z$ y $w$ e indique en cada caso, su dominio e imagen.

c*) Halle las expresiones de $h$, $z$ y $w$ en términos de $g$.

Ejemplo b) y c) para la función $z(x)$.

b) $z(x) = -(x+1)^2 + 2, \quad D(z) = [-2, 1], \quad Im(z) = [-2, 2]$

c) $z(x) = -g(x+1) + 2$

## 5.2. Ecuación de segundo grado

1. Resuelva, si es posible, las siguientes ecuaciones, y verifique, cuando corresponda, el resultado obtenido.
   a) $x^2 - 6x + 5 = 0$ b) $x^2 - 9 = 0$
   c) $4x^2 + 10 = 0$ d) $5x^2 - 2x = 0$

2. Resuelva, si es posible, las siguientes ecuaciones, y verifique, cuando corresponda, el resultado obtenido.
   a) $(x+3)^2 - 4 = 0$ b) $(x-2)^2 + 1 = 0$
   c) $x + 3 = \dfrac{-2x^2 + 7x - 3}{x - 3}$ d) $\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x-2} = 1$

3. Resuelva, si es posible, las siguientes ecuaciones, y verifique, cuando corresponda, el resultado obtenido.
   a) $x = 1 - \sqrt{2 - \frac{x}{2}}$ b) $\sqrt{2x+1} = \sqrt{x} + 1$ c) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
   d) $x^6 - 3x^3 - 4 = 0$ e) $(2\sqrt{x} + x + 2)(x^2 - 4) = 0$

4. Dada la ecuación cuadrática $x^2 - 2x + a = 0$, establezca los valores de $a$ para que:

   a) la ecuación tenga una sola raíz.

b*) la ecuación tenga dos raíces reales distintas.

c) la ecuación no tenga raíces reales

Ejemplo b). Las raíces de la ecuación son:

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot a}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4a}}{2}.$$

El discriminante $\Delta = 4 - 4a$ indica la naturaleza de las raíces. Para que la ecuación tenga dos raíces reales distintas debe ser $\Delta = 4 - 4a > 0$, es decir $a < 1$. Por lo tanto, la ecuación $x^2 - 2x + a = 0$ tiene dos raíces reales distintas si $a < 1$.

5. Halle, si es posible, todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para que:

   a) La función definida por $f(x) = x^2 - 5x + k$ tenga un único cero.

   b) La función definida por $f(x) = -3x^2 + 2x + k$ no tenga ceros reales.

   c) La función definida por $f(x) = -x^2 + 3kx + 2$ tenga dos ceros reales distintos.

   d) La función definida por $f(x) = -x^2 - kx + 2$ tenga a $x_0 = 3$ como único cero.

6. Encuentre, si existen, él o los puntos de intersección entre los siguientes pares de funciones. Grafique.

   a) $f(x) = -x^2 + 2x - 4$, $g(x) = -x - 8$ b) $f(x) = x^2 - 4x$, $g(x) = -x - 3$

7. Problemas. Plantee cada uno de los siguientes problemas indicando claramente cada variable utilizada, sus unidades (en los casos que corresponda) y el conjunto de valores que éstas pueden tomar. Luego, proceda a su resolución y verifique la validez de la respuesta dada.

   a*) Al disminuir en 6 m uno de los lados de un cuadrado, se obtiene un rectángulo cuya área es 91 m$^2$ ¿Cuál es la medida del lado del cuadrado?

   b*) Un grupo de jubilados decide hacer una excursión a Copahue. El costo del alquiler del micro es de \$200, a pagar en partes iguales. En el momento del viaje, cuatro jubilados deciden no ir, por lo que para cubrir el total de la excursión, los que viajan deben abonar \$2,50 extra cada uno. ¿Cuál es el total de jubilados que viajaron?

   c) Halle dos números naturales consecutivos tales que su producto sea 9506.

   d) Encuentre un número tal que la suma entre dicho número y la mitad de su cuadrado sea 60.

   e) Calcule un número entero tal que la suma del mismo y la tercera parte del cuadrado de su consecutivo sea 35.

   f) Halle un número entero, si es posible, tal que la diferencia entre la cuarta parte del cuadrado de su antecesor y la quinta parte del número sea 4.

   g) Halle dos números naturales consecutivos tales que su producto sea 552.

h) El perímetro de un rectángulo es de 20 cm y su área 21 $cm^2$. Calcule sus dimensiones.

i) El doble de la cantidad de CDs que tiene María multiplicado por la cantidad de CDs que tendría si le regalaran 12 más, es 1610. ¿Cuántos CDs tiene María?

j) La suma de dos números es 10 y la suma de sus cuadrados es 58. Halle ambos números.

k) Un fabricante de pequeños electrodomésticos sabe que la utilidad $P$ (en dólares) generada por la producción de $x$ hornos de microondas por semana está dada por la fórmula $P = \frac{1}{10}x(300 - x)$ siempre y cuando no se fabriquen más de 200 unidades. ¿Cuántos hornos debe fabricar en una semana para obtener una utilidad de 1250 dólares?

l) Estudiando la composición del aire entre las hojas de un prado de hierba alta se ha observado que la concentración de anhídrido carbónico varía según las distintas horas del día. Se han tomado datos durante las 24 horas de un día y se ha llegado a la conclusión de que la concentración, medida en v.p.m. (es decir, volúmenes por millón) viene dada por la fórmula $y = 2h^2 - 48h + 550$, donde $y$ representa la concentración y $h$, el tiempo medido en horas. Indique en qué momento la concentración es menor.

ll) Una pintura tiene un marco rectangular (de ancho uniforme) tal que sus aristas exteriores miden 20cm de largo por 14cm de ancho. Halle el ancho del marco sabiendo que la pintura ocupa una superficie de 160$cm^2$.

m) Naranjos que se cultivan en Entre Ríos producen 600 naranjas al año (cada uno) si no se plantan más de 50 árboles por hectárea. Por cada árbol adicional plantado por hectárea, la producción de cada naranjo disminuye en 6 naranjas. Determine cuántos naranjos habrá que plantar por hectárea para obtener la máxima producción de naranjas.

n) Al aumentar en 5cm el lado de un cierto cuadrado, se obtiene otro cuya área cuadruplica el área del cuadrado original. ¿Cuál es la longitud del lado del cuadrado original?

o) Si la diagonal de un rectángulo mide 20cm y su superficie es de 192 $cm^2$, ¿cuánto miden sus lados?

p) Entre todos los pares de números cuya suma es 100, determine el par cuyo producto es lo más grande posible.

q) Determine el área del rectángulo más grande posible que puede inscribirse en un triángulo rectángulo con catetos de 3 y 4 cm, si dos lados del rectángulo están sobre los catetos.

r) Suponga que $C(x)$ es el costo de producir $x$ artículos en una determinada empresa. En cada uno de los siguientes casos, halle cuántas unidades se deberían producir para minimizar el costo.

   i) $C(x) = 0,02x^2 - 4x + 1200$.

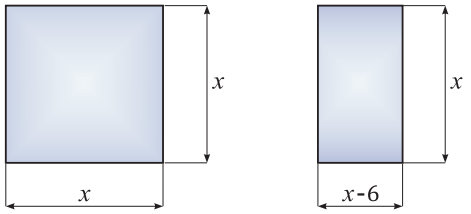
   ii) $C(x) = 0,02x^2 - 4x + 1200$, con $x \geq 200$.

   iii) $C(x) = 0,02x^2 + 4x + 1200$.

Ejemplo a). Al disminuir en 6 m uno de los lados de un cuadrado, se obtiene un rectángulo cuya área es 91 m$^2$ ¿Cuál es la medida del lado del cuadrado?

La clave para resolver cualquier problema aplicado es traducir la información dada al lenguaje algebraico, y para ello primero **identificamos cuáles son las variables**. Aquí se trata de determinar cuál es el lado del cuadrado, entonces:

$x =$lado del cuadrado.




Luego **expresamos todas las cantidades en términos de la variable**. En este caso, los lados del rectángulo son:

$$base = x - 6 \text{ y } altura = x.$$

Teniendo en cuenta que la base y la altura no pueden ser negativas, debe ser $x \in [6, +\infty)$.

El área del rectángulo es 91 m$^2$. Con este dato **relacionamos las cantidades**:

$$base \cdot altura = 91.$$

**Establecemos una ecuación**: $x(x - 6) = 91$.

Y por último **resolvemos la ecuación**: $x^2 - 6x - 91 = 0$.

Obtenemos como resultado $x = -7$ y $x = 13$, de lo cual concluimos que $x = 13$ es la única solución posible. Por último **escribimos la respuesta del problema**: El lado del cuadrado mide 13 cm.

Ejemplo b). Un grupo de jubilados decide hacer una excursión a Copahue. El costo del alquiler del micro es de \$200, a pagar en partes iguales. En el momento del viaje, cuatro jubilados deciden no ir, por lo que para cubrir el total de la excursión, los que viajan deben abonar \$2,50 extra cada uno. ¿Cuál es el total de jubilados que viajaron?

$x =$ cantidad de jubilados que viajarían.

$x - 4 =$ cantidad que viajaron.

Teniendo en cuenta que la cantidad de jubilados no pueden ser negativa, debe ser $x \in [4, +\infty)$.

Si viajaban todos, cada uno abonaría $\dfrac{200}{x}$ pesos.

Los que viajaron abonaron $\frac{200}{x} + 2,50$ pesos cada uno.

El producto entre lo que abona cada uno y la cantidad de personas que viaja debe dar exactamente \$200 pesos. Por lo tanto debemos resolver la ecuación:

$$(x-4)(\frac{200}{x} + 2,50) = 200.$$

La resolvemos: $200 + 2,5x - \frac{800}{x} - 10 = 200$

$$\frac{190x + 2,5x^2 - 800}{x} = 200, \quad x \neq 0$$

$$2,5x^2 + 190x - 800 = 200x$$

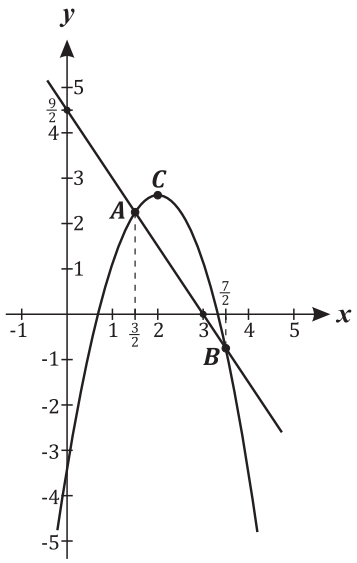
$$2,5x^2 - 10x - 800 = 0.$$

Las soluciones de esta última ecuación son: $x_1 = -16$ y $x_2 = 20$, de lo que podemos deducir que eran 20 los jubilados que inicialmente viajaban. Por lo tanto la cantidad de jubilados que finalmente viajó es 16.

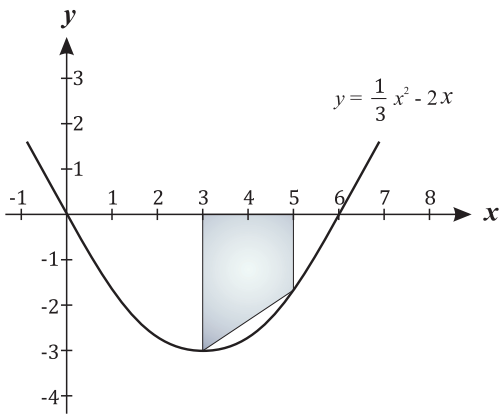
8. a) Halle la ecuación de la parábola con vértice $V = (2, -1)$ sabiendo que el triángulo determinado por los puntos en los que intersecta al eje $x$ y el punto $P = (2, 5)$ tiene área 20.

   b) Se sabe que la función $y = f(x)$ es cuadrática, por lo tanto su gráfico es una parábola. Su vértice es el punto de intersección entre las rectas de ecuación $y = -x + 4$ e $y - 2x = 1$. Uno de sus ceros coincide con un cero de la función lineal $y = x - 3$. Encuentre la expresión de $f$.

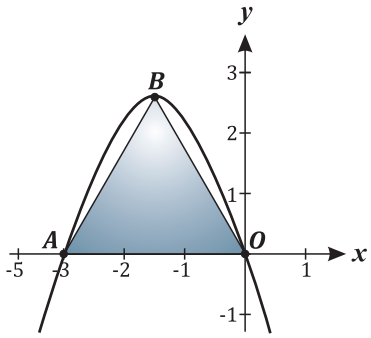
   c) Halle la ecuación de la parábola sabiendo que los puntos A, B y C tienen abscisas 3/2, 7/2 y 2 respectivamente, C es el vértice de la parábola y la recta intersecta a los ejes coordenados en (3,0) y (0,9/2).




d) Halle el área de la región sombreada sabiendo que la parábola que se indica tiene ecuación $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x$.




e) Halle la ecuación de la parábola sabiendo que el triángulo $\overset{\triangle}{ABO}$ es equilátero.




# 6. Polinomios y Funciones Polinómicas

## 6.1. Polinomios

1. Dadas las siguientes expresiones indique cuáles son polinomios y en tal caso indique el grado, el coeficiente principal, el término independiente y el término cuadrático.

   a) $-2t^3 + 4t^{\frac{9}{2}} - \dfrac{3}{t^2} + 2$

   b) $\frac{1}{2}t^5 + 6t^4 - \frac{3}{2}t^3 - 2t + 5$

   c) $\sqrt{t} - 2$

   d) $\frac{1}{5}t^2 + 2t - 1$

2. Construya un polinomio $p$ que verifique, en cada caso, las siguientes condiciones.

   a) Es de grado 3 y no tiene término lineal.

   b) Es de grado 4, el coeficiente principal es -3 y el término lineal es 1. ¿Es único dicho polinomio?

3. Escriba los siguientes polinomios en forma decreciente y completa.

   a) $p = \sqrt{2} - 3t^2 + t^5 + 6t - \frac{3}{2}t^3$

   b) $p = \frac{1}{2}t^2 - 5 + 4t - 6t^4 - \frac{3}{2}t^5$

4. a) Encuentre $a$, $b$, $c$ y $d$ para que los polinomios $p$ y $q$ sean iguales.

      i) $p = \frac{1}{3}t^2 + t + \frac{2}{5}t^3 + 3$ , $\quad q = (a-1)t^3 + (b+2)t^2 + ct + d$

      ii) $p = at^3 + bt^2 + ct + d$, $\quad q = 3(t-1)(t+2)(t-1)$

   b) Dado el polinomio $p = (a-1)t^2 + (b-3)t + c$, halle $a$, $b$ y $c$ para que $p$ sea igual al polinomio nulo.

5. Dados los polinomios $p = -3 + 5t^3 - 7t^2 + 3t$, $q = 4t^2 - 6t - 4t^4 + 3$, $r = 3t^3 + 2t$ y $s = 3$. Efectúe las siguientes operaciones.

   a) $(p + q).r$

b) $p - r^2$

c) $s.r - q + \frac{1}{2}.p$

6. Halle en cada caso el cociente y resto de la división entre los polinomios $p$ y $q$ dados.

   a) $p = 4t^4 + 18t^3 + 29t + 10, \quad q = 2t^2 + 3t - 1$

   b) $p = 2t^5 + 8t^3 - t^6, \quad q = t^2 + 2t$

7. ¿Es cierto que existe un polinomio $q$ tal que $6t^6 - 9t^4 + 10t^2 - 15 = q.(2t^2 - 3)$? Justifique.

8. Halle el cociente y el resto de dividir $p$ por $q$ utilizando la regla de Ruffini.

   a) $p = 9t^6 - t^4 + t^3 - 3t^2 + 6\ , \qquad q = t - 1$

   b) $p = 3t^5 + t^4 - 5t^2 - 5\ , \qquad q = t + 1$

9. Calcule el valor de $m$ para que el resto de la división de $p = 4t^4 + mt^3 + 3t^2$ por $q = t - 3$ sea 324.

10. a) ¿Cuál debe ser el valor de $k$ para que el polinomio $p = t^3 - 9t^2 + kt - 32$ sea divisible por $t - 4$?

    b) ¿Qué valores deben tener $m$ y $n$ para que el polinomio $p = t^3 + mt^2 + nt + 6$ sea divisible por $(t - 3)$ y $(t + 2)$ ?

◇*Definición:* Un valor $c \in \mathbb{R}$ es una raíz de un polinomio $p$ si el valor numérico de $p$ en $c$ es nulo, es decir $p(c) = 0$.

11. Determine, aplicando la definición, si los valores $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 0$ y $c_4 = \sqrt{2}$ son raíces de los siguientes polinomios.

    a) $p = t^3 - t^2 + t - 1$

    b) $p = t^4 - 2(\sqrt{2} + 1)t^3 + 2(2\sqrt{2} + 1)t^2 - 4t$

◇*Teorema del resto:* El resto $r$ de dividir un polinomio $p$ por $t - a$ es igual al valor numérico del polinomio en $a$, es decir $r = p(a)$.

12. Halle los valores de $a$ y $b$ para los cuales el polinomio $p = t^4 - at^3 + bt^2$ tiene como raíces $c_1 = 3$ y $c_2 = -1$. Sugerencia: aplique el teorema del resto.

13. Halle la única raíz real de $p = 2t^3 - 18t^2 + t - 9$, sabiendo que $p$ es divisible por $q = 2t^2 + 1$.

14. Encuentre los valores de $a$ tales que al dividir $t^2 + 5t - 2$ por $t - a$ el resto es igual a $-8$.

15. Halle todas las raíces reales de los siguientes polinomios e indique su orden de multiplicidad.

a) $p = t^4 - t^3 + 3t^2 - 3t$, sabiendo que $c = 1$ es raíz.

b) $p = t^3 - 3t^2 - 2t - 8$, sabiendo que $c = 4$ es raíz.

c) $p = 2t^3 + 6t^2 + 2t + 6$, sabiendo que $c = -3$ es raíz.

d) $p = t^4 - 3t^3 + 3t^2 - t$, sabiendo que $c = 1$ es raíz múltiple.

e) $p = 2t^5 + 12t^4 + 12t^3 - 36t^2 - 54t$, sabiendo que $c = -3$ es raíz doble.

f) $p = t^6 + \frac{9}{4}t^5 - \frac{5}{2}t^4 - \frac{19}{4}t^3 + 3t^2 + t$ sabiendo que $c_1 = -2$ y $c_2 = 1$ son raíces.

16. Halle un polinomio de grado cuatro que sea divisible por $t^2-4$ y que se anule para $c_1 = -3$ y $c_2 = 6$. ¿Es único dicho polinomio?

17. Halle un polinomio $p$ de grado tres que tenga a $c_1 = \frac{2}{3}$ como raíz de orden de multiplicidad 2, a $c_2 = -1$ como raíz simple y que verifique que $p(0) = 4$. ¿Es único dicho polinomio?

## 6.2. Funciones Polinómicas

◇ *Definición:* Una función polinómica de grado $n$ es una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por la fórmula

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde $a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0$ son números reales y $a_n \neq 0$.

1. Dadas las funciones polinómicas, determine el valor de $a$ que verifica:

   a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$; $f(a) = \frac{1}{2}$

   b) $f(x) = ax^3 - 3x + a$; $f(-2) = 27$

2. Halle, si es posible, una función polinómica $p(x)$ de grado dos que satisfaga simultáneamente las siguientes condiciones.

$$p(0) = 0, \quad p(1) = p(2) \quad \text{y} \quad 4p(3) - 3p(4) = 12.$$

3. Determine de dos formas diferentes si los valores de $x$ indicados en cada caso son ceros de las funciones polinómicas correspondientes.

   a) $f(x) = x^2 + 2x + 1, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 0$

   b) $f(x) = x^2 - 3x, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{3}$

   c) $f(x) = 2x + 1, \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = -\frac{1}{2}$

4. Halle los puntos de intersección de las siguientes funciones polinómicas con los ejes coordenados.

a) $f(x) = 5x + 3$ b) $f(x) = 2 - \frac{3}{2}x$ c) $f(x) = x^2 - 3x$ d)$f(x) = x^4 - 3x^2$

5. a) La cantidad de individuos de dos poblaciones A y B, responde a las siguientes fórmulas:

$$P_A(t) = \frac{3}{2}t + 50 \qquad P_B(t) = t^3 - 12t^2 + 44t + 8$$

donde $t$ es el tiempo expresado en semanas. Si ambas poblaciones coinciden en la cuarta semana, ¿tienen en algún otro momento el mismo número de individuos?

b) El Servicio Meteorológico utilizó como modelo para la variación de la temperatura en grados centígrados durante cierto día la fórmula $T(t) = 0,04\,t\,(t-12)(t-24)$ donde $t$ está medido en horas y $t = 0$ corresponde a 6 horas a.m. ¿A qué hora la temperatura fue de 0ºC? ¿A qué hora tomó valores superiores a 0ºC? ¿A qué hora valores inferiores a 0ºC?

c) En una isla se introdujeron 112 iguanas. Al principio se reprodujeron rápidamente, pero los recursos de la isla comenzaron a escasear y la población decreció. El número de iguanas a los $t$ años de haberlas dejado en la isla está dado por $I(t) = -t^2 + 22t + 112$. ¿En qué momento la población de iguanas se extingue? Calcule la cantidad de años en los cuales la población de iguanas aumentó. Grafique la función $I(t)$.

d) Una librería mayorista ha comprobado que la ganancia (en miles de pesos) por "$x$ cientos" de cajas de lápices está dada por la función $L(x) = -x^2 + 7x - 8$ y la ganancia (también en miles de pesos) por "$x$ cientos" de cajas de cuadernos viene dada por $C(x) = 2x - 4$. Calcule: i) el número de cajas de ambos útiles para el cual se obtiene la misma ganancia, ii) ¿Cuándo da pérdida la venta de lápices? ¿Y cuándo la de cuadernos?

# 7. Funciones Trigonométricas

## 7.1. Trigonometría

1. Exprese en grados, minutos y segundos sexagesimales la medida de un ángulo que en el sistema radial mide:

   a) $\frac{4\pi}{3}$ rad  b) $\sqrt{2}$ rad  c) $2,5$ rad  d) $\frac{2}{3}$rad  e) $\sqrt[3]{6}$ rad

2. Exprese en radianes la medida de un ángulo que en el sistema sexagesimal mide:

   a) $20°$  b) $85°15'40''$  c) $315°47'$  d) $\sqrt{37}$ °

3. Complete la siguiente tabla:

| radianes | $\frac{\pi}{3}$ | | | $\pi$ | | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{4}$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| grados | | 30 | 45 | | 225 | | | 330 | |

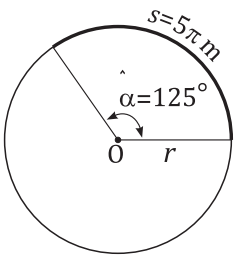
4. Encuentre la medida en ambos sistemas de medición (sexagesimal y radial), del menor ángulo que forman las agujas de un reloj.

   a) a las 4hs.  b) a las 7hs.  c) a las 2:30hs.  d) a las 1:25hs.

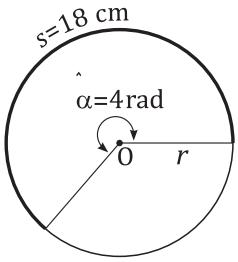
5. Determine la longitud del arco subtendido por un ángulo central $\alpha$, en una circunferencia de radio $r$, si:

   a) $\alpha = 80°$, $r = 3$cm  b) $\alpha = \frac{5\pi}{3}$ rad, $r = 4$cm

6. Determine el radio $r$ de las circunferencias de las siguientes figuras.



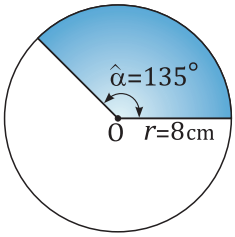

(a)



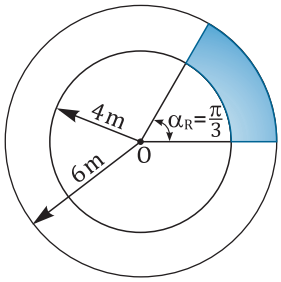

(b)

7. ¿Cuál es el diámetro de una mesa circular para 12 personas, si cada una de ellas ocupa un arco de 75cm?

8. Determine el área de la región sombreada en las siguientes figuras.




(a)




(b)

9. Calcule, reduciendo al primer cuadrante, los valores de las siguientes funciones trigonométricas.

   a) $sen(150°)$ b) $cos(-300°)$ c) $tg\left(\frac{7}{6}\pi\right)$ d)$sen\left(-\frac{5}{4}\pi\right)$

   e) $cos(540°)$ f) $tg\left(-\frac{2}{3}\pi\right)$ g) $cos\left(\frac{19}{4}\pi\right)$ h)$sen(450°)$

10. Indique en qué cuadrante se encuentra el ángulo $\alpha$ y el signo de las demás relaciones trigonométricas, si:

    a) $sen\ \alpha < 0$, $sec\ \alpha < 0$

    b) $cotg\ \alpha > 0$, $cosec\ \alpha > 0$

    c) $sen\ \alpha > 0$, $tg\ \alpha > 0$

11. Si $\alpha = \frac{\pi}{3}$ rad, determine el valor de cada una de las siguientes expresiones.

    a) $sen(2\alpha)$, $2sen\ \alpha$

    b) $sen(\frac{\alpha}{2})$, $\frac{1}{2}sen\ \alpha$

    c) $sen^2\alpha$, $sen(\alpha^2)$

12. Calcule, sin obtener el valor de $\alpha$, las restantes funciones trigonométricas si,

    a) $sen\ \alpha = \frac{4}{5}$ y $\alpha$ rad es la medida de un ángulo del segundo cuadrante.

    b) $tg\ \alpha = 4$ y $cos\alpha < 0$ .

    c) $cos\ \alpha = \frac{-3}{10}$ y $\alpha$ rad es la medida de un ángulo del tercer cuadrante.

13. Si $cos\ \alpha = \frac{7}{25}$ y $\alpha$ pertenece al cuarto cuadrante, determine, sin obtener el valor de $\alpha$, el valor exacto de la siguiente expresión:

    $sec\ \alpha + tg\ \alpha$ - $3cosec\ \alpha$.

14. Halle todos los valores de $\alpha$, $0° \leq \alpha < 360°$, que verifican

    a) $sen\ \alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

    b) $cos\ \alpha = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$

    c) $2sen\ \alpha = -1$

    d) $tg\ \alpha = -1$

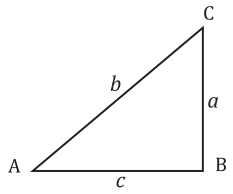
## 7.2. Resolución de Triángulos Rectángulos

1. Resuelva el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ indicado en la figura, para cada uno de los siguientes casos.

    a) $\widehat{A} = 42°$, $\quad b = 7 \quad$ cm.

    b) $b = 43,9 \quad$ cm, $\quad c = 24,3 \quad$ cm.

    c) $\widehat{C} = 55°$, $\quad c = 7 \quad$ cm.

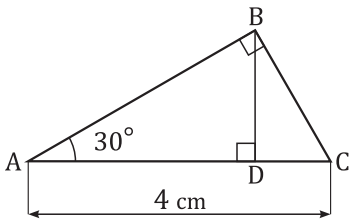



2. En un triángulo rectángulo un cateto mide 5cm y la altura correspondiente a la hipotenusa mide 4cm. Calcule su perímetro.

3. La diagonal de un rectángulo mide 60cm. Calcule, usando trigonometría, su base y su altura, sabiendo que la altura es igual a las tres cuartas partes de su base.

    ◇ Note que este problema puede resolverse sin hacer uso de conceptos trigonométricos. Inténtelo.

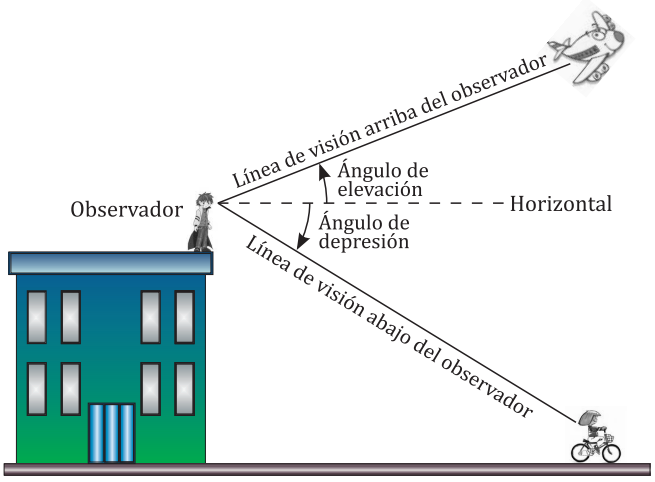
4. Con los datos de la figura, determine el área de los triángulos $\overset{\triangle}{ABC}$ y $\overset{\triangle}{ABD}$.




5. Un trapecio isósceles tiene bases que miden 12dm y 20dm, respectivamente. Determine la medida del ángulo en su base mayor, si el lado no paralelo mide 6dm.

◇*Nota*: Si un objeto está por encima de la horizontal, se llama *ángulo de elevación* al ángulo formado por la línea horizontal y la línea de visión del observador hacia el objeto.

Si un objeto está por debajo de la horizontal, se llama *ángulo de depresión* al ángulo formado por la línea horizontal y la línea de visión del observador hacia el objeto.

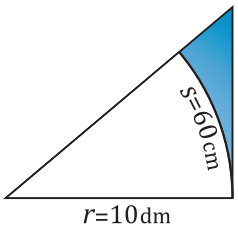



6. Desde lo más alto de un faro marítimo de 60 metros de altura se observa un avión y un barco, situados en una misma vertical, de manera que el ángulo de elevación del avión es de 25° y el ángulo de depresión de barco, de 32°. Halle:

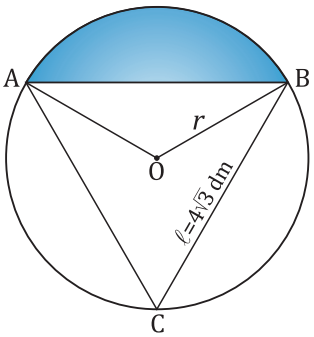
   a) la distancia $d$, desde la base del faro al barco, por el nivel del mar;

   b) la altura $h$ del avión sobre el nivel del mar.

7. Determine el área de la región sombreada en la siguiente figura.

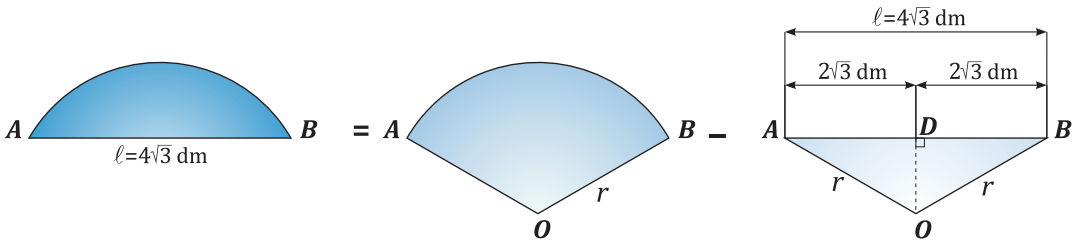



8*. Halle el área sombreada en la siguiente figura, sabiendo que el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ inscripto en la circunferencia es equilátero y que la longitud de su lado es $4\sqrt{3}$ dm.



Ejemplo 8.

$$\text{Area sombreada} = \text{Area Sector } OAB - \text{Area } \overset{\triangle}{AOB}$$




El triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ es equilátero, por lo tanto:

$$A\widehat{O}B = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}.$$

El triángulo $\overset{\triangle}{AOB}$ es isósceles:

$$O\widehat{A}D = D\widehat{B}O = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ.$$

En el triángulo $\overset{\triangle}{OBD}$, rectángulo:

$$\overline{OB} = r = \frac{\overline{DB}}{cos(30^\circ)} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}/2}\ dm = 4\ dm.$$

$$\overline{OD} = \overline{DB} \cdot tg(30^\circ) = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\ dm = 2\ dm.$$

$$\text{Area Sector } OAB = \frac{\overline{OB}^2 \cdot (A\widehat{O}B)_{rad}}{2} = \frac{16 \cdot \frac{2\pi}{3}}{2}\ dm^2 = \frac{16\pi}{3}\ dm^2 \approx 16,755\ dm^2.$$

$$\text{Area } \overset{\triangle}{AOB} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{OD}}{2} = \frac{4\sqrt{3} \cdot 2}{2} = 4\sqrt{3}\ dm^2 \approx 6,928\ dm^2.$$

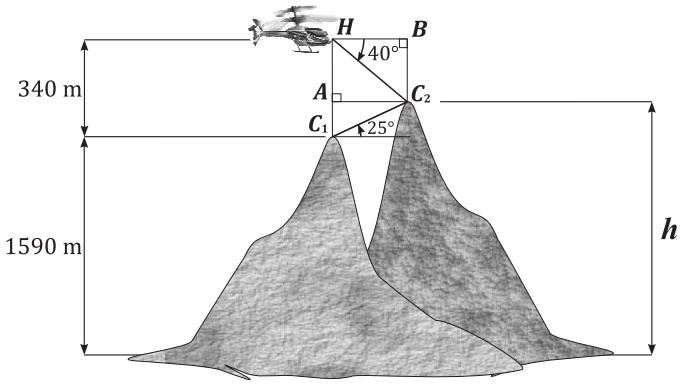
$$\text{Area sombreada} = \text{Area Sector } OAB - \text{Area } \overset{\triangle}{AOB} \approx (16,755 - 6,928)\ dm^2.$$

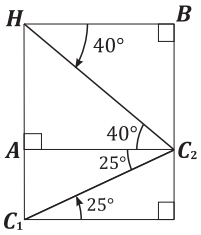
$$\text{Area sombreada} \approx 9,827\ dm^2.$$

9. Un helicóptero vuela a una altura de 340 m. sobre una cumbre de 1590 m de altura. Un segundo pico, más alto, se ve desde la primera montaña y desde el helicóptero. Desde el aparato, el ángulo de depresión es de 40°, y desde la primera cumbre, el ángulo de elevación es de 25°.

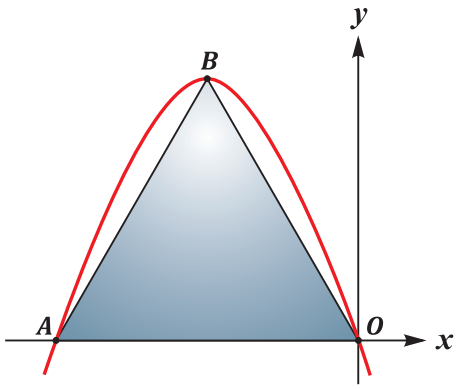
   a) Calcule la distancia de cima a cima.

   b) Calcule la altura del segundo pico.




10. Determine aplicando trigonometría, la ecuación de la parábola de la figura sabiendo que el triángulo $\overset{\triangle}{ABO}$ es equilátero y que su área es $A = 4\sqrt{3}u^2$.




◇ Note que este problema puede resolverse sin hacer uso de conceptos trigonométricos. Inténtelo.

# 8. Respuestas a los ejercicios

## Números reales

### Operaciones

1. Son todos múltiplos de 8.

2. Múltiplos de 2: 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16.
   Múltiplos de 3: 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24.
   Múltiplos de 4: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28.
   Múltiplos de 5: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35.
   Múltiplos de 6: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42.
   Múltiplos de 8: 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56.
   Múltiplos de 9: 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63.

   a) Sí.
   Todo múltiplo de 4 es múltiplo de 2.
   Todo múltiplo de 6 es múltiplo de 2 y de 3.
   Todo múltiplo de 8 es múltiplo de 2 y de 4.
   Todo múltiplo de 9 es múltiplo de 3.
   (Observar que no valen en general las recíprocas).

   b) No.

3. V - F - V - V - F

4. a) $-100,\ -99,\ -98$ b) $-17,\ -16,\ -15,\ -14,\ -13$ c) $-1,\ 0,\ 1,\ 2$

5. a) $n$ par. b) $n$ múltiplo de 3. c) $n$ número natural cualquiera. d) Ningún $n$. e) $n$ cuadrado perfecto.

6.

| Porcentaje | Fracción | Número decimal |
|---|---|---|
| 10 % | 1/10 | 0,1 |
| 25 % | 1/4 | 0,25 |
| 50 % | 1/2 | 0,5 |
| 80 % | 4/5 | 0,8 |
| 75 % | 3/4 | 0,75 |

7. a) i) Sí. ii) Sí, siempre que $a \neq 0$ b) i) No. ii) No.

   c) i) Sí. ii) No.

8. $-10$.

9. $-\dfrac{1}{x} < -\dfrac{1}{x+1} < \dfrac{1}{x+1} < \dfrac{1}{x} < x$

10. F - V - F - F

11. a) $\frac{a}{b} > 1$ b) $\frac{a}{b} < 1$ c) $\frac{a}{b} = 1$ d) $\frac{a}{b} \leq 1$.

12. \$1248.

13. a) $\frac{6+\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{4}$ b) $\frac{-3+3\sqrt{2}}{4}$ c) $\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{8}{3}\sqrt{2}+\frac{41}{12}$

14. a) $4\sqrt{6}$, b) $38-12\sqrt{10}$, c) $-\sqrt{3}$.

16. a) $\frac{\pi}{2}$ pertenece a los conjuntos $\mathbb{I}$ y $\mathbb{R}$.
    b) $\sqrt{36}$ pertenece a los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.
    c) $2,25111...$ pertenece a los conjuntos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.

19. a) $2-3(4{,}2+8) = 2-48 = -46$,
    $2-3(4{,}2+8) \neq -1{,}16$ (2 y -3 no pueden asociarse).
    b) $\frac{-2^2+4^{-1}}{-2^3-2^{-1}} \neq \frac{4+\frac{1}{4}}{-8-\frac{1}{2}}$.

20. a) Se necesitan $150000m$.
    b) Debemos comprar 94 perlitas.

21. V - F - F - V - V - F

22. a) $\frac{1}{a} < \sqrt{a} < a < a^2$ b) $a^2 < a < \sqrt{a} < \frac{1}{a}$.

**Operaciones con expresiones algebraicas y racionales**

1. a) -17 b) $\frac{2}{11}$ c) $-\frac{1}{8}$ d)2.

2. Es incorrecta porque si $x = 2$ e $y = 4$, $x + 2y + \sqrt{(x-2y)^2} \neq x + 2y + (x-2y) = 2x$. Reemplazando esos valores en la expresión de la izquierda resulta

$$2 + 8 + \sqrt{(-6)^2} = 10 + \sqrt{36} = 16.$$

   Reemplazando en la expresión de la derecha:

$$2 + 2 \cdot 4 + 2 - 2 \cdot 4 = 4.$$

   El error está en $\sqrt{(-6)^2} \neq -6$.

3. a) $0 < x - y$ b) $0 < x - (y + z)$ c) $0 < \frac{z-x}{y}$
   d) $x(y+z) < 0$ e) $0 < (-y)^3$ f) $0 < (y-x)^2$

4. a) $9xy - 10x^2y - 15xy^2 - 7x^2$ b) $x + 7y$ c) $4 - 4x + y$
   d) $b^{3x} - b^{3x+1}$ e)$-4a^x - 3a^{2x-1}$

6. a) $\sqrt{x^2 + y^2} \neq \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}$, $\sqrt{x^2} \neq x$.
   b) $x^2y + x + xy + y = x(xy + 1) + y(x + 1)$ y en esta última expresión no hay factores comunes.

7. a) $a^4(a^2 + 1)(a - 1)^2(a + 1)^2$ b) $(1 - 2b)^2$
   c) $(y - 5m)(y + 5m)$ d) $(x + y - a + b)(x + y + a - b)$.

8. b) $\dfrac{ba^2}{(b + 2a^2)(b - 2a)}$ si $b \neq 2a^2$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ c) $\dfrac{a - b}{a + b}$ si $a \neq 0$, $b \neq 0$
   d) $\dfrac{1}{(m - n)^2}$ si $n \neq \pm m$.

10. a) $\dfrac{x(x + \sqrt{2x - 1})}{x - 1}$ b) $-2(\sqrt{2 - x} + 3)$ , si $x \neq -7$ c)$\dfrac{1}{xy(\sqrt{x} - 2\sqrt{y})}$ ,si $x \neq 4y$.

**Ecuaciones**

1. a) $-1$ es solución; 2, no. b) $-1$ es solución; $-2$, no. c) $-1$ no es solución porque anula el denominador.

2. a) $S = \left\{\dfrac{14}{11}\right\}$ b) $S = \emptyset$ c) $S = \left\{\dfrac{4}{3}, 3\right\}$ d) $S = \{0, -1\}$ e) $S = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$
   f) $S = \mathbb{R} - \{-3\}$ g) $S = \mathbb{R} - \{1\}$.

3. a) $S = \left\{\dfrac{6}{5}\right\}$ b) $S = \{0\}$ c) $S = \emptyset$ d) $S = \emptyset$ e) $S = \left\{1, -1, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

4. a) $S = \{1\}$ b) $S = \left\{-\sqrt{12}, \sqrt{12}\right\}$ c) $S = \{-1, 0\}$ d) $S = \left\{16\sqrt{2}, -16\sqrt{2}\right\}$
   e) $S = \left\{4\sqrt{2}, -4\sqrt{2}\right\}$.

5. a) $m = -\dfrac{1}{6}$ b) $m = \dfrac{-9}{8}$ c) $m = \dfrac{68}{7}$.

6. a) 12 000 pesos b) 3 500 alumnos c) $15, 16, 17$ d) 13 años
   e) 14 % f) i) 1 000 $\text{dm}^3$ ii) $250\sqrt{2}$ $\text{dm}^3$ g) 6 metros h) 21 metros.

**Inecuaciones**

1. a) $(-4, 5)$ b) $(2, 12]$ c) $(-\infty, +\infty)$ d) $(2, 12]$ e) $(-4, +\infty)$

2. a) $(-7, 3]$ c) $(-\infty, +\infty)$

3. V - F - F - V

4. F - V - V

5. V - F - F

6. a) $(-\infty, 4]$ b) $[\frac{7}{4}, +\infty)$ c) $(\frac{268}{5}, +\infty)$ d) $(5, +\infty)$ f)$[-2, \frac{22}{3})$

7. a)$(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ c)$[-\frac{1}{2}, 0] \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$ d)$(0, 1)$ e) $(\frac{1}{2}, +\infty)$ f)$(-1, 0] \cup [1, 2)$

8. a) $(-\infty, \frac{1}{4}) \cup [\frac{3}{5}, +\infty)$ c) $[0, 2)$ d) $(-\infty, -2)$
   e) $[-2, 0) \cup [2, +\infty)$ f) $(-\infty, -\sqrt{6}] \cup (0, \sqrt{6}] \cup (3, +\infty)$

10. a) $x > 23$ b) 152 c) 45 y 56,25

## Funciones reales de una variable real

### Funciones

1. a) no b) sí c) sí

2. i) sí, $D(f) = A$, $Im(f) = \{a, b, c\}$ ii) no iii) no

3. no

4. i) no ii) sí iii) sí

5. a) $f(2) = 1$, $f(4) = 3$, $0 \notin D(f)$ b) $D(f) = [1, 7]$, $Im(f) = [1, 3] \cup (4, 7]$ c) $x = 3$

6. a) $f \neq g$ porque $f(x) \neq g(x)\ \forall x \in D(f) = D(g)$
   b) $f \neq g$ porque $D(f) = \mathbb{R} - \{1\} \neq D(g) = \mathbb{R}$

7. a)i) $A = f(l) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}l^2$ ii) $A = f(d) = \dfrac{\pi}{4}d^2$ b)$A = f(3) = \dfrac{9}{4}\sqrt{3}$

8. a)i) $S = f(a) = 6a^2$, $V = f(a) = a^3$ ii) $S = f(d) = \pi d^2$, $V = f(d) = \dfrac{\pi}{6}d^3$
   b) $S_l = f(5) = 150$

9. a) i) $A = f(h) = \dfrac{h^2}{3}$ b) $A = f(5) = \dfrac{3}{10}(5)^2 = 7,5$

10. $L = f(D) = \frac{5}{7}D$

11. a) $A = f(b) = -b^2 + 24b$ a$_1$) $D(f) = \{b \in \mathbb{R} : 0 \leq b \leq 24\}$
    c) $A = f(x) = x\Big[6 - \dfrac{x}{2}(\dfrac{\pi}{2} + 1)\Big] + \dfrac{1}{2}\pi \cdot \dfrac{x^2}{4} = -x^2\Big[\dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi}{8}\Big] + 6x$
    $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq \dfrac{24}{2 + \pi}\}$

### Dominio, imagen y gráfico

1. i)$(-\infty, +\infty)$ ii)$[1/2, +\infty)$ iii)$(-\infty, -8) \cup (-8, 1]$ iv)$(-\infty, 1]$

2. a)$D(f_1) = [-3/2, 4]$, $Im(f_1) = [-1, 9/2]$ b)$D(f_2) = [-5/2, 3]$, $Im(f_2) = [-2, 7/2]$
   c)$D(f_3) = [-9/2, 1]$, $Im(f_3) = [-9/2, 1]$

3. a)$D = \mathbb{R} - \{0\}$ b)$D = [2, +\infty)$ c)$D = \mathbb{R} - \{0\}$
   d)$D = \mathbb{R}$ e)$D = \mathbb{R} - \{-1\}$ f) $D = [-1, +\infty)$
   g)$D = \mathbb{R}$ h)$D = \mathbb{R}$ i)$D = (-\infty, -3) \cup [3, +\infty)$

4. a)$x = 1$ b)$x \in (1, 2)$ c)$x \in [3/2, 2)$ d) $x \in (2, 5/2)$

5. a) $D(f) = [-2, 4]$, $Im(f) = [-1, 3]$
   b) $g_1(x) = f(x - 1)$, $D(g_1) = [-1, 5]$, $Im(g_1) = [-1, 3]$
   $g_3(x) = f(x + 2) - 3$, $D(g_3) = [-4, 2]$, $Im(g_3) = [-4, 0]$

**Operaciones entre funciones**

1. a)$(f + g)(x) = 2x^2 + 3 + \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{2x^3 + 4x^2 + 3x + 7}{x+2}$ , $D(f + g) = \mathbb{R} - \{-2\}$
   b) $(f \cdot g)(x) = \dfrac{2x^2 + 3}{x+2}$, $D(f \cdot g)(x) = \mathbb{R} - \{-2\}$
   c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = (2x^2 + 3)(x + 2) = 2x^3 + 4x^2 + 3x + 6$, $D\left(\dfrac{f}{g}\right) = \mathbb{R} - \{-2\}$

2. a) $D(f) = \mathbb{R}$, $Im(f) = [-2, +\infty)$, $D(g) = \mathbb{R}$, $Im(g) = \mathbb{R}$
   b) $h_1$ está definida porque $Im(g) \cap D(f) = \mathbb{R} \neq \emptyset$,
   $h_2$ está definida porque $Im(f) \cap D(g) = [-2, +\infty) \neq \emptyset$
   c) $h_1(x) = (2x - 1)^2 - 2 = 4x^2 - 4x - 1$,
   $h_2(x) = 2(x^2 - 2) - 1 = 2x^2 - 5$

3. a)$D(f) = [-1, 2]$, $Im(f) = [0, 4]$, $D(g) = [0, 7]$, $Im(g) = [-4, 3]$
   b)$Im(g) \cap D(f) = [-1, 2] \neq \emptyset$, $h_1$ está definida.
   $Im(f) \cap D(g) = [0, 4] \neq \emptyset$, $h_2$ está definida.
   c)$h_1(2) = 1$, $h_2(0) = 3$, $h_2(2) = -1$
   No es posible calcular $h_1(5)$ porque $5 \in D(g)$ pero $g(5) = -2 \notin D(f)$

4. $(g \circ f)(-1) = 2$, no es posible calcular $(f \circ g)(4)$, $(h \circ g)(0) = -12$, $(g \circ h)(2) = \frac{\sqrt{13}}{2}$

5. $(f \circ g)(x) = \dfrac{x^3}{8} + 1 = \dfrac{x^3 + 1}{2} = (g \circ f)(x)$

6. a)$f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x + 1$ b)$f(x) = 4x$, $g(x) = x^3 + 3$ d)$f(x) = x - 1$, $g(x) = \sqrt[5]{x^2}$

## Funciones lineales

**Función lineal**

1. a)Si b)No c)Si d)No e)Si

3. a) $D(f) = \mathbb{R}$, $Im(f) = \mathbb{R}$

b) $f(6) = -\frac{2}{3}\cdot 6 + 5 = 1,\ f(-1) = -\frac{2}{3}\cdot(-1) + 5 = \frac{17}{3},\ f(0,75) = -\frac{2}{3}\cdot(0,75) + 5 = \frac{9}{2}$

c) $a = -37,5$

d) $S = (-\infty, -6]$

4. a)$y = \frac{1}{3}x + b,\ b \in R$ b) $y = m(x+2) + 3,\ m$ : pendiente

c) $y = \frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$

5. a)$C(x) = 800 + 6x$ b)$C(200) = 2000,\ C(1000) = 6800$ c)$D(C) = [0, +\infty)$

6. a) 5 min. b)$C(t) = 200 - 40t$. Es una función lineal. c) $D(C) = [0, 5],\ Im(C) = [0, 200]$

7. $P(B) = \frac{10}{3}B - 8,\ P$ : perímetro, $B$ : base mayor. $D(P) = (5, +\infty)$.

8. a)$Im(f) = (-2, +\infty),\ Im(g) = [-1, 3]$. b)$f(0)$ no es posible, $0 \notin D(f),\ f(1) = 1,\quad g(5)$ no es posible, $5 \notin D(g),\ g(-4) = 3$ c) $S = \left(0,\ \frac{2}{3}\right)$.

d)$(f+g)(x) = \frac{5}{2}x - 1,\ D(f+g) = (0, 4]; \quad (f-g)(x) = \frac{7}{2}x - 3,\ D(f-g) = (0, 4];$

$(f\cdot g)(x) = (3x-2)(-\frac{1}{2}x + 1) = -\frac{3}{2}x^2 + 4x - 2,\ D(f\cdot g) = (0, 4];$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{3x-2}{-\frac{1}{2}x+1},\ D\left(\frac{f}{g}\right) = (0, 2) \cup (2, 4].$

9. a) $D(f) \cap Im(g) \neq \emptyset,\ h_1(x) = f(g(x)) = -\frac{3}{2}x + 1.$

b) $(f \circ g)(-2) = 4,\ (f \circ g)(2)$ no es posible, $g(2) = 0 \notin D(f),\ (f \circ g)(4)$ no es posible por que $g(4) = -1 \notin D(f)$.

c) $D(g) \cap Im(f) \neq \emptyset,\ h_2(x) = g(f(x)) = -\frac{3}{2}x + 2.$

10. a) $D(f) = \mathbb{R},\ Im(f) = [3, +\infty).\quad D(g) = \mathbb{R},\ Im(g) = (-\infty, 0].$
$D(h) = \mathbb{R} - \{-1\},\ Im(h) = (-\infty, 4) \cup \{5\}.$

b) $f(-2) = 3,\ f(0) = 3.\ f(1) = 3,\quad g(-3) = -13,\ g(0) = 0,\ g(4) = -4.\quad h(-1)$ no es posible, $h(5) = -2.$ Si $0 < z$, entonces $1 < z+1,\ g(z+1) = -(z+1) = -z-1.$

11. $\frac{7}{3} = \frac{42}{18} \neq \frac{20}{5}$. No representa una función de proporcionalidad directa.

12. a) $k = -14,\ y = -14x.$ b) $f\left(\frac{1}{7}\right) = -2.$

13. Sï, $k = 1,4,\ P(C) = C + 0,4C = 1,4C,\ P(C)$ es una función lineal.

14. a) $k = 0,9,\ P(V) = 0,9V;\quad k = 0,2,\ P(V) = 0,2V;\quad k = 3,\ P(V) = 3V.$
c)Madera: $7,78dm^3$, Corcho: $35dm^3$.

**Rectas**

1. a) $A$ no, $B$ sí, $C$ no . b) $y = 3,\quad y = -3,\quad y = 0,\quad y = -12/5.$

2. a) i) $y = m(x-1) - 3$ y fijar un valor de $m$. ii) No existe tal recta. iii)$y = \frac{2}{3}x + 4$, $y = -2x - 4$

3. a)$y = 2x - 3$ b)$y = 6x + 13$ c)$y = x + 1$ d) $y = -\frac{5}{2}x + 3$ e)$y = \frac{3}{5}x$ f) $y = \frac{1}{2}x - 2$ g)$y = -3$ h)$x = 4$

4. a)$y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$ b)$y = -5$ c)$x = -1$ d) $y = \frac{3}{2}x$ e)$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ f) $x = -\frac{2}{3}$ g)$y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$ h)$y = -2\sqrt{2}x + \sqrt{2}$

5. a) $k = -\frac{1}{2}$ b) $k = \sqrt{3} - 2$

6. a) $k \in \mathbb{R} - \{6\}$ b)$k = 0,\ k = -2$ c)$k = 0$

7. Los puntos están alineados.

8. a) i) $d(P,Q) = \sqrt{5}$ ii)$d(P',Q') = \frac{3}{4}$ b)$a = 0,\ P_1 = (0,2);\ a = -2,\ P_2 = (-2,2)$

9. $B = (2, -4/3)$

10. $y = -2x + 6$

11. $d(A,C) = d(B,C) = \sqrt{29}$

12. Es un triángulo rectángulo en B.

13. $A = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{7}{2}\sqrt{2}),\ B = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{7\sqrt{2}}{2})$

14. a) $5x + 2y = 280$ b) 36

15. a)$1,1x + 0,85y = 250$ b)$x \approx 119$ grs c)$x \approx 227$ grs

16. a) $C = (2,6)$ b) $\sqrt{26}$ c) $13/2$

17. a) $l_1 : y = -3x - 1,\ l_2 : y = \frac{1}{3}x + 9,\ l_3 : y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3},\ l_4 : y = -x + 9$
b) $B = (-3,8)$,$C = (0,9),\ D = (5,4)$ c) $P \approx 22,88,\ A = 30$

## Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

### Clasificación y resolución

1. a) Compatible determinado; $x = \frac{3}{2},\ y = \frac{1}{6}$

   b) Compatible determinado; $x = 1,\ y = \frac{1}{2}$

   c) incompatible d) incompatible e) incompatible f) compatible indeterminado

3. b)
4. $a = 3$, $b = 5$. La solución general del sistema resultante es $S = \left\{\left(x, \frac{7-2x}{3} : x \in \mathbb{R}\right)\right\}$.
5. a) $a = 2$ b) $a = 4$, $y_P = 3$.
6. a) Compatible determinado si $k \neq 7$; compatible indeterminado si $k = 7$.
   b) Compatible determinado si $k \neq -2$; compatible indeterminado si $k = -2$.
7. a) Rectas incidentes; intersección en $(-2, 4)$, b) Paralelas no coincidentes.
   c) Rectas incidentes; intersección en $\left(1, -\frac{3}{2}\right)$.

**Problemas**

1. 19 ejercicios bien; 9 ejercicios mal.
2. 82 pelotas en una caja y 30 en la otra.
3. 15 cm el lado mayor y 12cm, el menor.
4. \$8 000 en acciones y \$10 000 en bonos.
5. a) 165 monedas de \$ 1 y 540 de 25 centavos. b) 7 billetes de \$20 y 32, de \$5.
6. $\frac{3}{7}$
7. 46
8. 573 y 51.
9. 2 500 unidades del artículo A y 3 000 unidades del artículo B.
10. 80 litros de la primera solución; 120 de la segunda.

## Función cuadrática y ecuación de segundo grado

### Funciones cuadráticas

1. a) i) sí ii) sí iii) sí iv) no v) no vi) no vii) no
   b) $A = (0, 5)$ pertenece al gráfico de ii)
2. a) $f(x) = -2x^2 - x + 3$ b) No existe, la función es lineal $f(x) = x + 1$
3. a) $V = (1/2, 9/4)$ c) $D(f) = \mathbb{R}$, $Im(f) = (-\infty, 9/4]$ d) máximo de $f$: 9/4, alcanzado en $x = 1/2$
4. a) i) $y = (x + 2)^2 - 4$ ii)Intersección con el eje $x$:(-4,0),(0,0). Intersección con el eje $y$:(0,0) iv) $(-\infty, -4] \cup [0, +\infty)$
   b)i) $y = -\frac{1}{6}(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{49}{24}$ ii)Intersección con el eje $x$:(-4,0),(3,0). Intersección con el eje $y$: (0,2) iv) [-4,3]
   c)i) $y = (x - \frac{9}{2})^2 - \frac{45}{4}$ ii)Intersección con el eje $x$: $(\frac{9+3\sqrt{5}}{2}, 0)$,$(\frac{9-3\sqrt{5}}{2}, 0)$. Intersección con el eje $y$: (0,9) iv) $(-\infty, \frac{9-3\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{9+3\sqrt{5}}{2}, +\infty)$

5. $f(x) = \frac{5}{3}x^2 - \frac{25}{3}x + 10$

6. $f(x) = 2(x-1)^2 - 2$

7. $b = -4$

8. $y = (x-2)^2 - 3$, $x = 2$

9.

| Forma Polinómica | Forma Canónica | Pto.∩ eje $y$ | Ptos. ∩ eje $x$ | Vértice | Imagen | Concav. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = x^2 + 1$ | $y = x^2 + 1$ | $P = (0, 1)$ | - | $V = (0, 1)$ | $[1, +\infty)$ | hacia arriba |
| $y = -x^2 + 2x + 2$ | $y = -(x-1)^2 + 3$ | $P = (0, 2)$ | $(1 + \sqrt{3}, 0)$,$(1 - \sqrt{3}, 0)$ | V=(1,3) | $(-\infty, 3]$ | hacia abajo |
| $y = x^2 - 2x + 3$ | $y = (x-1)^2 + k$ | $P = (0, 3)$ | - | $V = (1, 2)$ | $[2, +\infty)$ | hacia arriba |
| - | - | - | $P = (-3, 0)$ | $V = (h, 2)$ | - | - |

No es posible completar la última fila de la tabla.

10. a) $y = -\frac{3}{16}(x-4)^2 + 3$, b) $y = (x-2)(x-5)$ c) $y = -(x-3)^2 + 1 + \pi$

11. a) $h_1(x) = (x-1)^2 + 1$ b) $h_2(x) = x^2$ c) $h_3(x) = -x^2$ d) $h_4(x) = (x-1)^2 + 2$

12. a) $D(f) = [0, 2]$ , $D(g) = [-2, 0]$, $Im(f) = [0, 4]$, $Im(g) = [0, 2]$
    b) $Im(g) \cap D(f) = [0, 2] \neq$
    c) $h_1(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(-x) = (-x)^2 = x^2$, $h_2(x) = -f(g(x)) + 2 = -x^2 + 2$

13. $(f \circ g)(-4) = -1$, $(f \circ g)(-3) = 0$ y $(f \circ g)(3)$ no está definida.

14. a) $f(-3) = 18$, $f(2) = 0$, $f(4) = -2$, $f(t-1) = 2 - (t-1)$, b) $f(-1) = -2$, $f(1)$ no está definida, $f(2) = 0$ y $f(3t-1) = -2(3t-1)^2$

15. a) $D(g) = [-1, 2]$, $Im(g) = [0, 4]$
    b) $h(x) = -x^2$, $D(h) = [-1, 2]$, $Im(h) = [-4, 0]$; $w(x) = (x-2)^2 - 1$, $D(w) = [1, 4]$, $Im(w) = [-1, 3]$
    c) $h(x) = -g(x)$, $w(x) = g(x-2) - 1$

**Ecuación de segundo grado**

1. a) $\{5, 1\}$ b)$\{3, -3\}$ c)no existe solución real d) $\{0, 2/5\}$

2. a) $\{-1, -5\}$ b)no existe solución real c)$\{-2/3\}$ d)$\{1 + \sqrt{5}, 1 - \sqrt{5}\}$

3. a) $\{-1/2\}$ b) $\{0, 4\}$ c) $\{-1, 1, -2, 2\}$ d) $\{-1, \sqrt[3]{4}\}$ e) $\{2\}$

4. a) $a = 1$ b)$a < 1$ c)$a > 1$

5. a) $k = 25/4$ b) $k < -1/3$ c)$k \in \mathbb{R}$ d) no tiene solución

6. a)$A = (-1, -7)$, $B = (4, -12)$ b) no hay intersección

7. c) 97 y 98 d) -12 ó 10 e) 8 ó -13 f) no tiene solución g) 23 y 24 h) lados: 3cm y 7 cm i) 23 CDs j) 3 y 7 k) 50 hornos por semana l) la concentración es mínima a las 12hs ll) 2cm m) 75 naranjos n) 5cm o) 12cm y 16cm p) 50 y 50 q) 3cm$^2$ r) i) 100 unidades ii) 200 unidades iii) ninguna unidad

8. a)$y = \frac{1}{16}(x-6)(x+2)$ b)$f(x) = -\frac{3}{4}(x-1)^2+3$ c)$y = -\frac{3}{2}(x-2)^2+\frac{21}{8}$ d)área=14/3 e)$y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}(x+\frac{3}{2})^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$

## Polinomios y funciones polinómicas

### Polinomios

1. a) No es polinomio. b) Es polinomio de grado 5, coeficiente principal $\frac{1}{2}$, término independiente 5 y término cuadrático 0.
   c) No es polinomio. d) Es polinomio de grado 2, coeficiente principal $\frac{1}{5}$, término independiente -1 y término cuadrático $\frac{1}{5}$.

3. a) $p = t^5 - \frac{3}{2}t^3 - 3t^2 + 6t + \sqrt{2}$ b) $p = -\frac{3}{2}t^5 - 6t^4 + \frac{1}{2}t^2 + 4t - 5$

4. a) i) $a = \frac{7}{5},\ b = -\frac{5}{3},\ c = 1,\ d = 3.$ ii)$a = 3,\ b = 0,\ c = -9,\ d = 6.$
   b) $a = 1,\ b = 3,\ c = 0.$

5. a) $-12t^7 + 15t^6 - 17t^5 + t^4 - 6t^3 - 6t^2$
   b) $-9t^6 - 12t^4 + 5t^3 - 11t^2 + 3t - 3$
   c) $4t^4 + \frac{23}{2}t^3 - \frac{15}{2}t^2 + \frac{27}{2}t - \frac{9}{2}$.

6. a) Cociente: $2t^2 + 6t - 8$, resto: $59t + 2$.
   b) Cociente: $-t^4 + 4t^3 - 8t^2 + 24t - 48$, resto: $96t$.

7. Sí, $q = 3t^4 + 5$.

8. a) Cociente: $9t^5 + 9t^4 + 8t^3 + 9t^2 + 6t + 6$, resto: 12.
   b) Cociente: $3t^4 - 2t^3 + 2t^2 - 7t + 7$, resto: $-12$.

9. $m = -1$

10. a) $k = 28.$ b) $m = -2,\ n = -5.$

11. a) $c_1$ es raíz. b) $c_2$, $c_3$ y $c_4$ son raíces.

12. $a = 2, \quad b = -3.$

13. La única raíz real es 9.

14. $a = -3,\ a = -2.$

15. a) 0 y 1 son raíces simples. b) 4 es raíz simple.
   c) -3 es raíz simple d) 0 y 1 son raíces de orden de multiplicidad 1 y 3 respectivamente.
   e) -3 es raíz de orden de multiplicidad 2; 0, $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{3}$ son raíces simples.
   f) 0 y $-\frac{1}{4}$ son raíces simples; 1 y -2 son de orden de multiplicidad 2.

16. Cualquier polinomio de la forma $p = a(t^2-4)(t+3)(t-6)$, $a \neq 0$, $a \in \mathbb{R}$.

17. $p = 9(t+1)(t-\frac{2}{3})^2$. Es único.

**Funciones Polinómicas**

1. a) $a = -1$ y $a = -3$ b)$a = -3$.,
2. $p(x) = -x^2 + 3x$.
3. Son ceros de las funciones polinómicas:
   a) $x_1$, b) $x_1$, c) $x_2$.
4. a) $(-\frac{3}{5}, 0),\ (0, 3)$. b) $(\frac{4}{3}, 0),\ (0, 2)$. c) $(3, 0),\ (0, 0)$, d) $(\sqrt{3}, 0),\ (-\sqrt{3}, 0),\ (0, 0)$.
5. a) Sí, en la segunda ($t \approx 1,65$) y en la séptima semana ($t \approx 6,34$). b) La temperatura es 0°C a las 6 a.m. y a las 6 p.m.; la temperatura es superior a 0°C entre las 6 a.m. y las 6 p.m.; la temperatura es inferior a 0°C entre las 6 p.m. y las 6 a.m. c) La población de iguanas se extingue a los 26 años, aproximadamente. La población creció durante los primeros once años. d) i) 400 cajas ii)si vende menos de 143 y más de 556 cajas de lápices, aproximadamente; si vende menos de 200 cajas de cuadernos.

## Funciones Trigonométricas

**Trigonometría**

1. a) 240° b)81°1′42″ c)143°14′22″ d)38°11′50″ e)104°6′48″
2. a) $\frac{\pi}{9}$ b) 1,488 c)5,511 d) 0,106
4. a) 120° b)150° c)105° d) 107°30′
5. a) 4,189 cm b) 20,94 cm
6. a) 7,2m b)4,5 cm
7. 286,478 cm
8. a) 75,398 cm$^2$ b)10,472 m$^2$
9. a) $sen(150°) = sen(30°) = 1/2$ b) $cos(-300°) = cos(60°) = 1/2$ c) $tg(\frac{7}{6}\pi) = tg(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ d) $sen(-\frac{5}{4}\pi) = sen(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $cos(540°) = -cos(0°) = -1$ f) $tg(-\frac{2}{3}\pi) = tg(\pi/3) = \sqrt{3}$ g) $cos(\frac{19}{4}\pi) = -cos(\pi/4) = -\sqrt{2}/2$ h) $sen(450°) = sen(90°) = 1$
10. a) $\alpha$ pertenece al tercer cuadrante; $tg\ \alpha > 0$, $cotg\ \alpha > 0$, $cosec\ \alpha < 0$
    b) $\alpha$ pertenece al primer cuadrante; $sen\ \alpha$, $cos\ \alpha$, $tg\ \alpha$, $sec\ \alpha$ positivos
    c) $\alpha$ pertenece al primer cuadrante; $cos\ \alpha$, $sec\ \alpha$, $cosec\ \alpha$ positivos.
11. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{3}$ b)$\frac{1}{2}$ , $\frac{\sqrt{3}}{4}$ c)$\frac{3}{4}$ , 0,88967

12. a) $cos\ \alpha = -\frac{3}{5}$, $tg\ \alpha = -\frac{4}{3}$, $sec\ \alpha = -\frac{5}{3}$, $cotg\ \alpha = -\frac{3}{4}$, $cosec\ \alpha = \frac{5}{4}$
    b) $sen\ \alpha = -\frac{4}{\sqrt{17}}$, $cos\ \alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$, $cotg\ \alpha = \frac{1}{4}$, $cosec\ \alpha = -\frac{\sqrt{17}}{4}$, $sec\ \alpha = -\sqrt{17}$
    c) $sen\ \alpha = -\frac{\sqrt{91}}{10}$, $tg\ \alpha = \frac{\sqrt{91}}{3}$, $sec\ \alpha = -\frac{10}{3}$, $cotg\ \alpha = \frac{3}{\sqrt{91}}$, $cosec\ \alpha = -\frac{10}{\sqrt{91}}$

13. $\frac{183}{56}$

14. a) 45°, 135°  b)150°, 210°  c)210°, 330°  d) 135°, 315°

**Resolución de triángulos rectángulos y problemas de aplicación**

1. a) $\widehat{C} = 48°$, $a \approx 4,683$, $c \approx 5,202$
   b) $a \approx 36,561$, $\widehat{A} = 56,392°$, $\widehat{C} = 33,607°$
   c) $\widehat{A} = 35°$, $a \approx 4,901$, $b \approx 8,5454$

2. 20cm

3. base: 48cm, altura: 36cm

4. área de $A \overset{\triangle}{B} C = 2\sqrt{3}$ cm$^2$, área de $A \overset{\triangle}{B} D = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm$^2$

5. $48°11'23''$

6. $d \approx 96,02$m, $h \approx 104,775$m

7. aproximadamente 4,207dm$^2$

9. a)aproximadamente 287,38  b)aproximadamente 1711,452

10. $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}(x+2)^2 + 2\sqrt{3}$